میرایی متغیر در تحلیل ناخطی هندسی صفحه‌های خمشی به‌روش رهایی پویا*

محمد رضایی پژند[۱]   حسین استیری[۲]

چکیده هدف اصلی این مقاله، تحلیل ناخطی صفحه‌های خمشی با فن تفاوت محدود است. راهکار رهایی پویا بر پایهٔ میرایی متغیر رابطه‌سازی خواهد شد. برای رسیدن به همگرایی مناسب، از سه معیار سرعت، کارمایهٔ جنبشی و نسبت جابه‌جایی دو گام پیاپی بهره‌جویی می‌شود. برای مسئله‌های گوناگون صفحهٔ خمشی، مقایسهٔ پاسخ‌های حل با میرایی متغیر و ثابت انجام می‌پذیرد. تجربه‌های عددی نشان می‌دهند که میرایی متغیر، شایسته‌تر از گونهٔ ثابت است. با وجود این، روش پیشنهادی نویسندگان سبب کاهش شمار تکرارها و زمان تحلیل خواهد شد. آشکار می‌شود که با وجود توانایی‌های تفاوت محدود، این روش به انتخاب پاره‌ای از عامل‌ها بسیار حساس می‌باشد؛ به گونه‌ای که تغییر اندک در مقدار این عامل‌ها، سبب افزایش شمار تکرارها و زمان تحلیل و گاه واگرایی پاسخ خواهد شد. دیگر هدف این مقاله، مرور کوتاهی بر پژوهش‌های راه حل رهایی پویای صفحه‌های خمشی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی رهایی پویا; تفاوت‌های محدود; میرایی; معیار همگرایی; صفحهٔ خمشی; تغییرشکل‌های بزرگ.

Variable Damping in Geometric Nonlinear Plate Bending Analysis using Dynamic Relaxation Method

M. Rezaiee-Pajand   H. Estiri

Abstract *The main purpose of this paper is the nonlinear analysis of bending plates with the finite difference. Based on the variable damping, the dynamic relaxation technique will be utilized. In order to achieve proper convergence, the velocity, kinetic energy and two successive displacement ratio criteria are used. For various bending plate samples, the results of constant and variable damping are compared. Numerical examples show that the variable damping is better than the constant damping. However, author's scheme reduces the number of iterations and the time duration. The finite difference method is very sensitive to the choice of some factors. A slight change in the amount of these parameters will increase the number of iterations and the time duration. Moreover, sometimes the solution procedure is divergenced. Another goal of this article is presenting a brief review of the dynamic relaxation approach in solving the bending plates.*

Key Words Dynamic relaxation; Finite difference; Damping; Convergence criterion; Bending plate; Large deformations.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۴/۶/۲ و تاریخ پذیرش آن ۹۴/۱۱/۲۱ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v28i2.49314

(۱) نویسندهٔ مسئول: استاد ،گروه عمران، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد. mrpajand@yahoo.com

(۲) دانشجوی دکتری سازه، گروه عمران، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

مقدمه

به‌سبب اهمیت ویژه و کاربردی صفحه‌ها در ساخت سازه‌های مکانیکی و عمرانی، پژوهش‌های بسیاری بر روی رفتار آنها انجام شده است. هم‌چنین، روش‌های دقیق و عددی زیادی برای حل این سازه‌ها پیشنهاد کرده‌اند [1] و در آغاز کار، به مسئله‌های ایستایی و سپس به نوسان آزاد آنها پرداختند. نخستین رابطه‌های ریاضی را اولر برای صفحه‌های بسیار نازک نوشت. وی نوسان آزاد غشاهای چهارپهلو، دایره‌ای و سه‌گوشه را بررسی نمود. برنولی برای صفحه‌هایی که با تیرهای خمشی شبکه‌بندی شده بودند، روش اولر را به‌کار برد. گرمین معادله‌های دیفرانسیل صفحه‌ها را برای نخستین بار گسترش داد [2].

نگرهٔ کامل خمش صفحه‌ها را کیرشهف پیشنهاد کرد. او پنداشت‌های برنولی برای خمش تیرها را به‌کار گرفت و معادله‌های دیفرانسیل صفحه‌ها را نوشت. در سال ۱۹۰۷، فوپل نگرهٔ ناخطی صفحه‌ها را به چاپ رساند. ونکارمن معادله‌های دیفرانسیل برای تغییرشکل‌های بزرگ صفحه‌ها را در سال ۱۹۱۰ پیشنهاد نمود. پرسکات روشی برای به‌کار گرفتن کرنش‌های میان صفحه نمایش داد [2]. پاسخ معادله‌های دیفرانسیل ونکارمن را نخستین بار کِیسر بااستفاده از روش تفاوت‌های محدود در دسترس قرار داد [2]. به‌کمک تابع‌های مثلثاتی و سری فوریه، لِوی معادله‌های ونکارمن را حل کرد و رابطه‌های حاکم بر خمش صفحه‌های نازک چهارپهلو با تغییرشکل‌های بزرگ را به‌دست آورد [3]. پانو و ولمیر به حل مسئله‌های ناخطی ایستایی پرداختند. در سال ۱۹۲۵، نادای از فن تفاوت‌های محدود برای تحلیل بهره‌جست. این فرآیند عددی، برای صفحه‌هایی که استفاده از روش‌های تحلیلی برای آنها مشکل است، به نتیجه‌های بسیار مناسبی رسید. استوسی و کُلاتز این فن را بهبود بخشیدند [2].

صفحه‌های نازک با نگرهٔ کیرشهف تحلیل می‌شوند. برمبنای پنداشت‌های کیرشهف، پیش و پس از تغییرشکل عمود بر میان صفحه، عمود باقی می‌ماند. نگرهٔ رایزنر- میندلین اثر برش را وارد می‌نماید و صفحهٔ خمشی با تغییرشکل برشی کم یا زیاد را تحلیل می‌کند. بر این پایه، عمودهای وارد بر میان صفحه پس از تغییرشکل نیز راست باقی می‌مانند، ولی بر میان صفحه عمود نخواهند بود [4, 5]. برگان و کلاف [6]، الگوی اجزای محدودی را برای صفحه‌ها و پوسته‌های نازک بر پایهٔ روش ریلی- ریتز بنیاد نهادند. با به‌کاربردن فن لاگرانژ به هنگام، یانگ و بتی [7] یک جزء ناخطی برای حل ایستا و پویای صفحه‌ها رابطه‌سازی کردند. پاسخ ناخطی صفحه‌ها، بااستفاده از روش نوارهای محدود، به‌وسیلهٔ داوه و همکاران [8] انجام پذیرفت.

تحلیل صفحه‌های کشسان با تغییرشکل‌های بزرگ، با دشواری‌هایی همراه است؛ به‌گونه‌ای که شمار اندکی روش حل دقیق وجود دارد. با افزایش قدرت پردازش رایانه‌ها، روش‌های حل عددی و تقریبی برای تغییرشکل‌های بزرگ گسترش یافت. نتیجه‌های بی‌شماری از اینها تاکنون در دسترس قرار گرفته‌اند. رهایی پویا یکی از این روش‌ها می‌باشد. نخستین بار نام رهایی پویا به‌وسیلهٔ اُتر و دِی [9-11] در میانهٔ دههٔ ۶۰ میلادی به‌کار رفت. راهکار رهایی پویا از روش مرتبهٔ دوم فرانکل [12]، گسترش یافته توسط فرانکل، سرچشمه می‌گیرد. نخستین کاربرد این راه حل در مسئله‌های ناخطی به راشتن باز می‌گردد. وی از این فرآیند برای تحلیل ناخطی هندسی صفحه‌های خمشی بهره‌جست [13]. او این فن را در مسئله‌های تحلیل تنش و تحلیل رفتار پس‌کمانشی صفحه‌ها نیز به‌کار برد [14]. باسو و داوسن [15] با این شیوه به تحلیل تغییرشکل‌های کوچک صفحه‌های ساندویچی همسانگرد و ناهمسانگرد با سطح مقطع ثابت و متغیر پرداختند.

آنچه در ادامه می‌آید بر پایهٔ راهکار رهایی پویا

انجام پذیرفته است. راشتن کمانش صفحه‌های دارای انحنای نخستین با بارگذاری جانبی را بررسی نمود [16]. رفتار پس‌کمانشی صفحه‌های چندلایه دارای تغییرشکل‌های بزرگ را تروی و ویتریک [17] به سرانجام رسانیدند. آلوار و رائو حل ناخطی صفحه‌های ناهمسانگرد دارای تکیه‌گاه‌های گیردار و ضخامت ثابت با بارگذاری یکنواخت جانبی را پیشنهاد کردند [18,19]. راشتن و هوک [20] پاسخ صفحه‌ها و تیرهای دارای تغییرشکل‌های بزرگ و رفتار ناخطی تنش و کرنش را به‌دست آوردند. این پژوهشگران تحلیل کمانش تیرها و صفحه‌های دارای یک تکیه‌گاه میانی را نیز انجام دادند [21]. تحلیل صفحه‌ها، شامل هر دو اثر ناخطی مواد و هندسی، به‌وسیلهٔ فرایز و همکاران انجام گرفت [22]. تروی [23] راهکار رهایی پویا را در رفتار ناخطی هندسی صفحه‌های قطاعی باریک‌شونده بررسی کرد. تحلیل گذرا و گذراسان صفحه‌های میندلینی را پیکا و همیتون [24] انجام دادند. شیوهٔ تفاوت محدود برای تحلیل تیرهایی با خیر کوچک و شبکه‌بندی‌های برابر و نابرابر را تروی و آوانسیان به‌کار بردند [25].

اَلشاوی و ماردیروشن [26] بااستفاده از ضریب‌های وزنی برای جرم و میرایی، ترکیب اجزای محدود و رهایی پویا را برای یافتن پاسخ صفحه‌های خمشی به‌کار بردند. زانگ و یو [27] روش رهایی پویای وفقی بهبودیافته‌ای پیشنهاد کردند و از آن برای حل خمش کشسان- مومسان صفحه‌های دایره‌ای بهره‌جستند. تروی و عثمان [28] از شیوهٔ تفاوت محدود رهایی پویا در تحلیل ناخطی هندسی صفحه‌های مستطیلی میندلینی همسانگرد استفاده کردند. تروی و صالحی [29] با بهره‌جستن از روش رهایی پویا و فن تفاوت‌های محدود، تغییرشکل‌های بزرگ صفحه‌های قطاعی زیر اثر بار یکنواخت را تحلیل نمودند. مقایسهٔ روش تفاوت محدود و اجزای محدود رهایی پویا را نیز این پژوهشگران انجام دادند [30]. با بهره‌جویی از معیارهای پویایی پایداری و روش رهایی پویا، کدخدایان و همکاران همکاران [31] به تحلیل کمانشی و پس‌کمانشی صفحه‌ها پرداختند. تروی و صالحی [32] تحلیل خطی و ناخطی صفحه‌های قطاعی مرکب را به نتیجه رسانیدند.

در این پژوهش، صفحه‌های راست پهلو بافرض تغییرشکل‌های بزرگ و اثر خمش، بااستفاده از راه حل تفاوت محدود و رهایی پویا تحلیل می‌شوند. نخست، عامل ضریب میرایی به‌گونه‌ای به‌دست می‌آید که همگرایی را برقرار نماید. در رابطه‌سازی‌های معمول، با ساده کردن رابطه‌های جرم و میرایی، مقدار میرایی در تکرارهای رهایی پویا مقداری ثابت پیدا می‌کند. در این‌جا، از میرایی متغیر نیز بهره‌جویی خواهد شد. در این‌گونه میرایی از جرم‌های ثابت، که در سرتاسر تحلیل یک مقدار دارند و نیز جرم‌های متغیر، که در هر تکرار به هنگام می‌شوند، استفاده می‌گردد. در بیشتر مسئله‌ها، پیشینیان معیار سرعت را برای همگرایی در تحلیل صفحه‌ها به روش رهایی پویا و تفاوت‌های محدود به‌کار می‌گرفتند. بر پایهٔ معیار سرعت، اگر در تکرارهای رهایی پویا سرعت از مقدار خطای مجاز کمتر شد، سازه به حالت ایستا و درنتیجه به پاسخ می‌رسد. در این مقاله، افزون بر معیار سرعت، دو معیار انرژی جنبشی و نسبت جابه‌جایی دو گام پیاپی از تکرارهای رهایی پویا نیز به‌کار می‌رود و مقایسه‌ای بین آنها انجام می‌پذیرد.

روش رهایی پویا

روش رهایی پویا، فن صریح حل دستگاه معادله‌های هم‌زمان می‌باشد. در این راهکار، جرم و میرایی ساختگی را به سامانهٔ معادله‌های سازهٔ ایستا می‌افزایند تا یک دستگاه پویای ساختگی به‌دست آید.

$$[M]^n\left\{\ddot{X}\right\}^n+[C]^n\left\{\dot{X}\right\}^n+[S]^n\{X\}^n=\{f\}^n=\{P\} \quad (۱)$$

در این برابری، M و C، به ترتیب، ماتریس‌های جرم و میرایی ساختگی قطری می‌باشند. بردارهای، X، $\dot{X}$ و $\ddot{X}$ به‌ترتیب، جابه‌جایی، سرعت و شتاب را نمایش می‌دهند. تحلیلگران ماتریس سفتی و بردار بارهای خارجی و نیروهای داخلی را به ترتیب با S، P و f نشان داده‌اند. رونویس n، نماد شمارهٔ تکرار در فن رهایی پویا است. پاسخ دستگاه (۱) هنگامی به‌دست می‌آید که نیروهای جرمی و میرایی ساختگی صفر شوند. به سخن دیگر، پاسخ حالت پایدار سامانهٔ پویای (۱)، همان پاسخ دستگاه (۲) می‌باشد که در تحلیل‌های ایستا به‌کار می‌رود.

$$[S]\{X\}=\{f\}=\{P\} \qquad (۲)$$

باید افزود، بردار نیروی نامیزان R که سبب نوسان ساختگی سازه می‌گردد، رابطهٔ زیر را دارد:

$$R=[M]\{\ddot{X}\}+[C]\{\dot{X}\} \qquad (۳)$$

می‌توان این‌گونه پنداشت که پاسخ ایستای سازه، در نیروی نامیزان صفر به‌دست می‌آید. در فن رهایی پویا، در هرگام زمانی t، تغییر سرعت را خطی و شتاب را ثابت می‌پندارند. بر این پایه، با بهره‌جویی از تفاوت‌های محدود مرکزی، می‌توان برابری‌های زیر را برای رابطه‌های تکراری این راه حل به‌دست آورد:

$$\dot{x}_i^{n+\frac{1}{2}}=\frac{2m_{ii}^n-C_{ii}^n t^n}{2m_{ii}^n+C_{ii}^n t^n}\dot{x}_i^{n-\frac{1}{2}}+\frac{2t^n}{2m_{ii}^n+C_{ii}^n t^n}(p_i-f_i^n) \quad , \quad i=1,2,...,ndof \qquad (۴)$$

$$x_i^{n+1}=x_i^n+t^{n+1}\dot{x}_i^{n+\frac{1}{2}} \quad , \quad i=1,2,...,ndof \qquad (۵)$$

عامل‌های m_{ii}^n، C_{ii}^n، t^n و f_i^n، به‌ترتیب، درایهٔ قطری i اُم از ماتریس‌های جرم و میرایی ساختگی، گام زمانی ساختگی، درایهٔ i اُم از بردار نیروی داخلی در تکرار n اُم رهایی پویا می باشند. بار خارجی دستگاه ایستا با p_i نمایش داده می‌شود. شمار درجه‌های آزادی سامانه را با عامل ndof نشان می‌دهد. برابری‌های (۴ و ۵)، تا همگرایی به پاسخ پایدار تکرار می‌شوند. پنداشت قطری بودن ماتریس‌های جرم و میرایی ساختگی سبب می‌گردد که رابطه‌های روش رهایی پویا صریح باشند و تنها با عملگرهای برداری انجام شوند.

وِلش و همکاران [33] وارتر و همکاران [34] نخستین تحلیلگرانی بودند که اندیشهٔ جرم ساختگی را پیشنهاد نمودند و بااستفاده از روش‌های عددی، تکرارهای رهایی پویا را بهبود دادند. راه حل رهایی پویا را وود [35] با سه روش تکراری دیگر مقایسه کرد. وی جرم ساختگی را بااستفاده از کران بالایی شعاع طیفی ماتریس ضریب‌ها پیدا کرد [36]. او نشان داد که نرخ همگرایی رهایی پویا، از روش‌های نیمه‌تکراری در تحلیل سازه‌ها بیشتر است. برو و بروتن [37] نشان دادند که روش رهایی پویا برای حل دستگاه معادله‌های خطی و به‌ویژه برای تحلیل سازه‌های قابی مناسب است. هم‌چنین، به این نتیجه دست یافتند که این فرآیند برای وارد کردن اثرهای ناخطی مفید می‌باشد. آنها پیشنهاد نمودند که جرم هر درجهٔ آزادی، متناسب با درایهٔ قطری آن در ماتریس سفتی سازه باشد. روشی برای تخمین میرایی بحرانی در روش رهایی پویا بااستفاده از اصل ریلی را بونس [38] پیشنهاد داد.

نخستین شرط‌های پایداری راه حل را کسل و هُبس [39] یافتند. آنها برای وارسی همگرایی و پایداری عددی تحلیل‌های ناخطی با روش رهایی پویا، جرم ساختگی را با بهره‌جستن از نگرهٔ دایرهٔ گرشگورین (Gerschgörin) تخمین زدند. یک فرآیند

خودکار برای یافتن عامل‌های تکراری را پاپادراکاکیس [40] پیشنهاد کرد. این شیوه نیازی به آزمون و خطا و یا تحلیل مقدارهای ویژهٔ ماتریس سفتی ندارد. مشکل راه حل وی، حدس نخستین دو عامل می‌باشد. گونهٔ دیگر رابطه‌سازی رهایی پویا را فلیپا [41] انجام داد. این راهکار، در دسته‌بندی روش‌های ضمنی جای می‌گیرد و عامل‌های جرم و میرایی، از تغییر سفتی سازه در زمان ساختگی حساب می‌شوند. یکی از رابطه‌سازی‌های مشهور برای تکرارهای رهایی پویا را آندرووود [42] انجام داد. وی میزان گام زمانی را در تکرارهای رهایی پویا ثابت پنداشت. کانگ [43] میرایی و زمان ساختگی را بااستفاده از اصل ریلی به‌دست آورد. زانگ و همکاران [44] حدس نخستین پایدار را درست کردند و الگوی میرایی گرهی را پیشنهاد دادند. مونجیزا و همکاران [45, 46]، میرایی را متناسب با توانی از ماتریس‌های جرم و سفتی به‌کار گرفتند. آنها نشان دادند که هرگاه ماتریس میرایی به‌شکل $2M(M^{-1}S)^{0.5}$ باشد، تمامی حالت‌ها به‌صورت بحرانی میرا می‌شوند [45, 46].

برای کاهش تکرارها و با هدف افزایش مرتبهٔ خطا و به‌دنبال آن، بهبود نرخ همگرایی رهایی پویا، رضایی پژند و تقویان حکاک [47] از گسترش دنبالهٔ تیلور بهره‌جستند. آن‌ها از سه جملهٔ نخست دنبالهٔ تیلور، جابه‌جایی را حساب کردند. این پژوهشگران، مقدار گام زمانی در تکرارهای رهایی پویا را ثابت پنداشتند. بر پایهٔ کمینه‌سازی نیروهای نامیزان در تکرارهای رهایی پویا، بهبود گام زمانی ساختگی به‌وسیلهٔ کدخدایان و همکاران [48] رابطه‌سازی شد. روش رهایی پویا برای تحلیل پویای ناخطی را رضایی پژند و علامتیان [49] به‌کار گرفتند. آنها این راه حل را با گام زمانی بهبود یافته به‌کار بردند. در این روش، خطاهای تابع اولیه گیری را کاهش می‌دادند. رضایی پژند و علامتیان [۵۰]، در پیمایش ناحیه‌های بازگشتی، برای یافتن ضریب بار در هر تکرار رهایی پویا، از دو فرآیند کمینه کردن نیروی نامیزان و تغییرمکان نامیزان استفاده نمودند؛ باید آگاه بود، با بهره‌جستن از این راهکارها، تحلیل به‌جای همگرایی به نقطه‌های ایستایی دور، به نقطه‌های ایستایی نزدیک همگرا خواهد شد. تحلیل پویای سازه‌ها بااستفاده از دو محور زمان متعامد حقیقی و ساختگی را سرافرازی [۵۱] انجام داد. ماتریس‌های جرم و میرایی حقیقی و ساختگی نیز در رابطه‌سازی وی وارد می‌شدند.

پیوند نسبت گام زمانی بهینه و میرایی بحرانی در تحلیل‌های ناخطی با فن رهایی پویا، توسط رضایی پژند و سرافرازی [52] به‌دست آمد. این پژوهش آشکار کرد که مقدار گام زمانی ثابت اثری بر روی نرخ همگرایی ندارد. رضایی پژند و علامتیان [53] رابطه‌های جدیدی برای میرایی و جرم ساختگی در روش رهایی پویای بهبود یافته برقرار نمودند. شیوهٔ آنها نشان داد که می‌توان بدون انجام کارهای عددی بیشتر نرخ همگرایی را بالا برد. افزون بر اینها، روش جدیدی برای حساب کردن میرایی ساختگی را رضایی پژند و همکاران [54] پیشنهاد دادند. برای رسیدن به این هدف، می‌توان از کمینه نمودن خطا بین دو گام پیاپی و بهره‌جستن از فرآیند تکراری بهره‌جست. برای گذر خودکار از نقطه‌های حدی، رضایی پژند و علامتیان [55] روشی را با کمینه نمودن نیروی نامیزان و کارمایهٔ نامیزان پشنهاد دادند.

ماتریس‌های جرم و میرایی و نیز گام زمانی ساختگی در راه حل رهایی پویا نقش دارند. با وارد کردن مقدار صفر برای میرایی و یافتن نسبت گام زمانی آن، رضایی پژند و سرافرازی [56] روش دیگری را رابطه‌سازی کردند. آنها به تحلیل پویای ناخطی سازه‌ها نیز پرداخته‌اند. افزون بر اینها، بر پایهٔ کارمایهٔ نامیزان، روش جدیدی به‌دست آمد [57]. رضایی پژند و همکاران [58]، کارایی دوازده روش رهایی پویا را برای تحلیل اجزای محدودی سازه‌های قابی و خرپایی بررسی کردند. آنها با مقایسهٔ شمار و زمان کل تحلیل،

پنج روش برتر را معرفی نمودند.

آن‌گونه که آمد، عامل‌های ناشناخته در رابطه‌سازی‌های روش رهایی پویا، ماتریس‌های قطری جرم و میرایی ساختگی، بردار تغییرمکان نخستین و گام زمانی ساختگی می‌باشند. به‌طور معمول، بردار جابه‌جایی آغازین را صفر یا یکه و گام زمانی ساختگی را برابر یک می‌پندارند. یکی دیگر از پژوهش‌ها، گام زمانی را برپایهٔ اصل ریلی پیشنهاد می‌کند [43]. برترین راهکار برای یافتن ماتریس جرم ساختگی، استفاده از نگرهٔ دایرهٔ گرشگورین است [39, 42]. روش خودکار دیگر که نیاز به وارد شدن کاربر ندارد، شیوهٔ پیشنهادی رضایی پژند و علامتیان [53] می‌باشد. متداول‌ترین راهکار پیدا کردن عامل میرایی، استفاده از اصل ریلی است [44 , 38]. از میان معمولی‌ترین آنها، می‌توان از رابطه‌های زانگ و آندروود نام برد [27, 42]. روشی با نرخ همگرایی بیشتر را رضایی پژند و همکاران پیشنهاد داده‌اند [52-54].

در ادامهٔ مقاله، ویژگی‌های راه حل رهایی پویا می‌آید. در این شیوه، نیروهای داخلی هر یک از جزءها، از ضرب تغییرمکان‌های گرهی در ماتریس سفتی جزء حساب می‌گردند. روی‌هم‌گذاری نیروی داخلی همهٔ جزءها، بردار نیروی داخلی کل را در دسترس قرار می‌دهد. نیروهای نامیزان، اختلاف بین نیروهای داخلی و بارهای خارجی هستند. از این‌رو، فن رهایی پویا به روی‌هم‌گذاری و انبار کردن ماتریس سفتی کل سازه نیازی ندارد. بنابراین، برای حل مسئله‌های با رفتار ناخطی شدید ماده و هندسه مناسب است. نیاز نداشتن به برپاسازی ماتریس سفتی کل، سبب سادگی برنامه‌نویسی این روش می‌شود [۵۹]. استفاده از عملگرهای برداری به‌جای حساب‌های پیچیدهٔ ماتریسی، نیاز به انبار رایانه را کاهش می‌دهد. چون روش رهایی پویا به‌طور کامل خودکار است؛ بنابراین، وارد شدن کاربر در کارآیی تحلیل تأثیری ندارد. این فرآیند خطاهای گرد کردن عددها را از بین می‌برد و می‌توان پاسخ‌ها را با دقت دلخواه به‌دست آورد [51]. دیگر شایستگی این فن، حساس نبودن به نقطه‌های حدی در مسیر ایستایی می‌باشد [۵۹].

هنوز راه حل کاملی برای حل معادله‌های ناخطی سازه‌ها در دسترس نمی‌باشد. فن رهایی پویا هم کاستی‌هایی دارد. پاره‌ای از کاستی‌های این شیوه در ادامه می‌آیند. فرآیند در حالت کلی پایدار نیست؛ با وجود این، می‌توان با وارد نمودن شرط‌هایی پایداری آن را برقرار نمود. نرخ همگرایی این روش اندک است. انتخاب عامل‌های مناسب، نرخ همگرایی را افزایش می‌دهد [۵۹]. تکرارهای رهایی پویا در بار ثابت صورت می‌پذیرد که مشکل‌هایی را در نقطه‌های حدی به‌وجود می‌آورد. در تحلیل ناخطی با نرم‌شوندگی ملایم، شمار تکرارهای راه حل رهایی پویا درمقایسه با روش‌های نیوتنی بسیار بیشتر است [47]. باید دانست، روش رهایی پویا دو دستهٔ کلی لزجی و جنبشی دارد. رابطه‌های روش رهایی پویای لزج پیش از این آمدند. در ادامهٔ کار، به فن جنبشی پرداخته خواهد شد. در روش جنبشی، دستگاه پویای ساختگی بدون میرایی می‌باشد. بر این پایه می‌توان رابطه‌های تکراری رهایی پویای جنبشی را به‌صورت زیر به دست آورد:

$$\dot{x}_i^{n+\frac{1}{2}} = \dot{x}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{t^n}{m_{ii}^n}(p_i - f_i^n) \quad , \quad i = 1,2,...,ndof \tag{۶}$$

$$x_i^{n+1} = x_i^n + t^{n+1}\dot{x}_i^{n+\frac{1}{2}} \quad , \quad i = 1,2,...,ndof \tag{۷}$$

باید آگاه بود، گام زمانی ساختگی را در تکرارهای روش رهایی پویای جنبشی برابر یک می‌پندارند. به کار

بردن میرایی جنبشی به‌جای لزج، رابطه‌سازی رهایی پویا را ساده‌تر می‌کند. به سخن دیگر، تنها به یک کران بالا برای مقدار ویژهٔ بیشینه نیاز است [40]. از میان دیگر برتری‌های این کار بر فن‌های پیشین، پایداری و همگرایی بالا در تحلیل‌های ناخطی هندسی می‌باشد [60]. با وجود این، نرخ همگرایی روش رهایی پویای جنبشی، از گونهٔ لزج کمتر است [40]. نخستین بار، کاندال [61] از روش رهایی پویای جنبشی برای تحلیل مسئله‌های مکانیک سنگ ناپایدار بهره‌جست.

رهایی پویا و صفحه‌های خمشی راست‌پهلو

در این بخش، رابطه‌های تفاوت محدود رهایی پویا برای حل صفحه‌های خمشی راست پهلو با رفتار ناخطی هندسی می‌آید. در این فرآیند باید از معادله‌های دیفرانسیل ایستایی، رابطه‌های کرنش- تغییرمکان، انحنا- تغییرمکان و نیز برابری نیروهای داخلی بهره‌جست. خاطر نشان می‌شود، برخلاف تغییرشکل‌های کوچک، در نگرهٔ تغییرشکل‌های بزرگ، میان صفحه دارای کرنش خواهد بود. ساختار صفحهٔ همسانگرد پنداشته می‌شود. در فن رهایی پویا، در گام زمانی t، تغییر سرعت را خطی و شتاب را ثابت می‌پندارند؛ آن‌گاه می‌توان برابری (۸) را نوشت:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^{a}+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^{b}\right] \quad , \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}=\frac{1}{t}\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^{a}-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^{b}\right] \tag{۸}$$

نماد a و b، به‌ترتیب، مقدار پایان و آغاز گام زمانی را نشان می‌دهند. عامل α می‌تواند u، v و w، که به‌ترتیب، جابه‌جایی در راستای x، y و z می‌باشد را اختیار کند. باید دانست، u و v، تغییرمکان‌های دورن صفحه‌ای می‌باشند. تغییرمکان جانبی یا همان خیز صفحه با w نشان داده می‌شود. در راهکار رهایی پویا، دستگاه ایستا با افزودن جرم و میرایی ساختگی به دستگاه پویا تبدیل می‌گردد. به سخن دیگر، با گذاردن جمله‌های وابسته به جرم و میرایی در سوی دیگر معادله‌های دیفرانسیل ایستایی سازه، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$EQ_i=m_\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}+c_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tag{۹}$$

در این برابری، EQ_i معادلهٔ دیفرانسیل ایستایی صفحه در راستای α است. با قرار دادن EQ_i در (۹)، ساده‌سازی آن و استفاده از $C_\alpha^*=\frac{c_\alpha t^a}{2m_\alpha}$، سرعت در پایان گام زمانی به قرار زیر خواهد بود:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^{a}=\frac{1}{1+C_\alpha^*}\left[\left(1-C_\alpha^*\right)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^{b}+\frac{t^a}{m_\alpha}\left(EQ_i\right)\right] \tag{۱۰}$$

خیز و تغییرمکان‌های درون صفحه‌ای در پایان گام زمانی، بااستفاده از رابطه‌های حرکت جسم‌ها به‌دست می‌آید. این مقدارها در زیر می‌آیند:

$$x=Vt+x_0 \quad \rightarrow \quad \alpha^a=\alpha^b+t^a\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^{b} \tag{۱۱}$$

در ادامه‌ی کار، تفاوت‌های محدود مرکزی برای یافتن مشتق لنگرها و خیز سازه به‌کار می‌رود. هم‌چنین، مشتق تغییرمکان‌های درون‌صفحه‌ای از تفاوت‌های پس‌رو، و مشتق نیروهای درون‌صفحه‌ای از تفاوت‌های پیش‌رو به‌دست می‌آیند. باید دانست که رابطهٔ (۱۰) نیز باید به شکل تفاوت محدود بازنویسی گردد. در پایان، تغییرمکان‌های گره (i,j) بااستفاده از (۱۲) در دست

خواهند بود:

$$\alpha^{a}_{i,j} = \alpha^{b}_{i,j} + t^{a}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^{b}_{i,j} \tag{۱۲}$$

پایداری رهایی پویا

پایداری روش تکراری رهایی پویا به تخمین مناسب جرم و میرایی ساختگی وابسته است. در این پژوهش، جرم ساختگی از روش کَسل و هُبس [39] به‌دست می‌آید. آنها گام زمانی را برابر با یک پنداشتند.

$$m_{\alpha_{i,i}} = \frac{\left(t^{a}\right)^{2}}{4}\sum_{j=1}^{k}\left|S_{ij}\right|_{\alpha} \tag{۱۳}$$

در برابری کنونی، شمار گره‌ها با k نشان داده شده‌اند. این رابطه آشکار می‌کند که مقدار جرم ساختگی هر گره در هر تکرار(m_α)، بااستفاده از حاصل جمع ردیفی قدر مطلق داریه‌های ماتریس سختی به‌دست می‌آید. برای یافتن آن، نیروهای داخلی به شکل تفاوتی و بر پایهٔ جابه‌جایی‌ها بازنویسی می‌گردند:

$$N_{x_{i,j}} = A\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{\Delta x}+\frac{1}{2}\left(\frac{w_{i+1,j}-w_{i-1,j}}{2\Delta x}\right)^{2}\right]\\&+\upsilon\left[\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{\Delta y}+\frac{1}{2}\left(\frac{w_{i,j+1}-w_{i,j-1}}{2\Delta y}\right)^{2}\right]\end{aligned}\right\}$$

$$N_{y_{i,j}} = A\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{\Delta y}+\frac{1}{2}\left(\frac{w_{i,j+1}-w_{i,j-1}}{2\Delta y}\right)^{2}\right]\\&+\upsilon\left[\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{\Delta x}+\frac{1}{2}\left(\frac{w_{i+1,j}-w_{i-1,j}}{2\Delta x}\right)^{2}\right]\end{aligned}\right\}$$

$$N_{x_{i,j}} = \frac{A}{2}\left(1-\upsilon\right)\left\{\begin{aligned}&\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\Delta y}+\frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{\Delta x}\\&+\frac{\left(w_{i,j+1}-w_{i,j-1}\right)\left(w_{i+1,j}-w_{i-1,j}\right)}{4\Delta x\Delta y}\end{aligned}\right\}$$

$$M_{x_{i,j}} = -D\left(\begin{aligned}&\frac{w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}}{\left(\Delta x\right)^{2}}\\&+\upsilon\frac{w_{i,j+1}-2w_{i,j}+w_{i,j-1}}{\left(\Delta y\right)^{2}}\end{aligned}\right)$$

$$\left\{\begin{aligned}&M_{x_{i,j}} = -D\left(\frac{w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}}{\left(\Delta x\right)^{2}}+\upsilon\frac{w_{i,j+1}-2w_{i,j}+w_{i,j-1}}{\left(\Delta y\right)^{2}}\right)\\&M_{y_{i,j}} = -D\left(\frac{w_{i,j+1}-2w_{i,j}+w_{i,j-1}}{\left(\Delta y\right)^{2}}+\upsilon\frac{w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}}{\left(\Delta x\right)^{2}}\right)\\&M_{xy_{i,j}} = -D\left(1-\upsilon\right)\left(\frac{w_{i-1,j-1}-w_{i-1,j+1}-w_{i+1,j-1}+w_{i+1,j+1}}{4\Delta x\Delta y}\right)\end{aligned}\right\} \tag{۱۴}$$

حاصل جمع ردیفی قدر مطلق درایه‌های ماتریس سختی را می‌توان مجموع یک مقدار ثابت، که در سراسر تحلیل ثابت می‌ماند و یک مقدار متغیر پنداشت، که باید در هر تکرار به‌دست آید. بر این پایه، برابری زیر برقرار خواهد بود:

$$\sum_{j=1}^{k}\left|S_{ij}\right|_{\alpha} = \sum_{j=1}^{k}\left|S_{ij}\right|^{c}_{\alpha} + \sum_{j=1}^{k}\left|S_{ij}\right|^{v}_{\alpha} \tag{۱۵}$$

رونویس‌های c و v، به‌ترتیب، بخش‌های ثابت و متغیر حاصل جمع را نشان می‌دهد. یادآوری می‌کند، α می‌تواند هر یک از مقدارهای u، v و w را اختیار نماید. هر یک از بخش‌های برابری کنونی با بهره‌جویی از معادله‌های دیفرانسیل ایستایی صفحه به‌دست می‌آید. به سخن دیگر، بااستفاده از معادله‌های دیفرانسیل ایستایی درون‌صفحه‌ای، می‌توان به برابری‌های (۱۶) رسید:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{k}\left|S_{ij}\right|_{u}^{\beta}=\dfrac{\overline{N}_{x_{i+1,j}}^{\beta}+\left|-\overline{N}_{x_{i,j}}^{\beta}\right|}{\Delta x}+\dfrac{\overline{N}_{xy_{i,j+1}}^{\beta}+\left|-\overline{N}_{xy_{i,j}}^{\beta}\right|}{\Delta y}\\ \sum_{j=1}^{k}\left|S_{ij}\right|_{v}^{\beta}=\dfrac{\overline{N}_{xy_{i+1,j}}^{\beta}+\left|-\overline{N}_{xy_{i,j}}^{\beta}\right|}{\Delta x}+\dfrac{\overline{N}_{y_{i,j+1}}^{\beta}+\left|-\overline{N}_{y_{i,j}}^{\beta}\right|}{\Delta y}\end{cases}$$

(۱۶)

نماد β بخش‌های ثابت و متغیر را نشان می‌دهد. در گسترش جمع ردیفی برای معادلۀ دیفرانسیل ایستایی خارج صفحه، علامت نیروهای درون‌صفحه‌ای در پایداری عددی نقش دارد [39]. به سخن دیگر، مقدار منفی برای این نیروها بیانگر کاهش سفتی می‌باشد [22]. بنابراین، بخش‌های ثابت و متغیر حاصل جمع برای این راستا، با توجه به رابطه‌های زیر و از برابری (۱۶) به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\left|S_{ij}\right|_{w}^{cx}=\dfrac{\overline{M}_{x_{i+1,j}}+2\overline{M}_{x_{i,j}}+\overline{M}_{x_{i-1,j}}}{(\Delta x)^{2}}\\ \sum_{j=1}^{n}\left|S_{ij}\right|_{w}^{cxy}=\dfrac{\overline{M}_{xy_{i-1,j-1}}+\overline{M}_{xy_{i-1,j+1}}+\overline{M}_{xy_{i+1,j-1}}+\overline{M}_{xy_{i+1,j+1}}}{2\Delta x\Delta y}\\ \sum_{j=1}^{n}\left|S_{ij}\right|_{w}^{cy}=\dfrac{\overline{M}_{y_{i,j+1}}+2\overline{M}_{y_{i,j}}+\overline{M}_{y_{i,j-1}}}{(\Delta y)^{2}}\\ \sum_{j=1}^{n}\left|S_{ij}\right|_{w}^{vx}=\left(\overline{N}_{x_{i,j}}^{c}+\overline{N}_{x_{i,j}}^{v}\right)\dfrac{\left|w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}\right|}{(\Delta x)^{2}}\\ +N_{x_{i,j}}\dfrac{4}{(\Delta x)^{2}}=\left(\overline{N}_{x_{i,j}}^{c}+\overline{N}_{x_{i,j}}^{v}\right)\left|\kappa_{x_{i,j}}\right|+N_{x_{i,j}}\dfrac{4}{(\Delta x)^{2}}\\ \sum_{j=1}^{n}\left|S_{ij}\right|_{w}^{vxy}=\left(\overline{N}_{xy_{i,j}}^{c}+\overline{N}_{xy_{i,j}}^{v}\right)\left|\kappa_{xy_{i,j}}\right|+N_{xy_{i,j}}\dfrac{1}{\Delta x\Delta y}\\ \sum_{j=1}^{n}\left|S_{ij}\right|_{w}^{vy}=\left(\overline{N}_{y_{i,j}}^{c}+\overline{N}_{y_{i,j}}^{v}\right)\left|\kappa_{y_{i,j}}\right|+N_{y_{i,j}}\dfrac{4}{(\Delta y)^{2}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\left|S_{ij}\right|_{w}^{c}=\sum_{j=1}^{n}\left|S_{ij}\right|_{w}^{cx}+\sum_{j=1}^{n}\left|S_{ij}\right|_{w}^{cxy}+\sum_{j=1}^{n}\left|S_{ij}\right|_{w}^{cy}\\ \sum_{j=1}^{n}\left|S_{ij}\right|_{w}^{v}=\sum_{j=1}^{n}\left|S_{ij}\right|_{w}^{vx}+\sum_{j=1}^{n}\left|S_{ij}\right|_{w}^{vxy}+\sum_{j=1}^{n}\left|S_{ij}\right|_{w}^{vy}\end{cases}$$

(۱۷)

اکنون، عامل‌های $\overline{N}$ و $\overline{M}$ باید تعریف شوند. بااستفاده از نیروهای داخلی (۱۴) و قدر مطلق ضریب‌های تغییرمکان، برابری‌های زیر برای یافتن این دو عامل به‌کار می‌روند:

$$\begin{cases}\overline{N}_{x_{i,j}}^{c}=A\left[\dfrac{1+|-1|}{\Delta x}+\upsilon\left(\dfrac{1+|-1|}{\Delta y}\right)\right]=2A\left(\dfrac{1}{\Delta x}+\dfrac{\upsilon}{\Delta y}\right)\\ \overline{N}_{xy_{i,j}}^{c}=\dfrac{A}{2}(1-\upsilon)\left[\dfrac{1+|-1|}{\Delta x}+\dfrac{1+|-1|}{\Delta y}\right]=A(1-\upsilon)\left(\dfrac{1}{\Delta x}+\dfrac{1}{\Delta y}\right)\\ \overline{N}_{y_{i,j}}^{c}=A\left[\dfrac{1+|-1|}{\Delta y}+\upsilon\left(\dfrac{1+|-1|}{\Delta x}\right)\right]=2A\left(\dfrac{1}{\Delta y}+\dfrac{\upsilon}{\Delta x}\right)\\ \overline{N}_{x_{i,j}}^{v}=\dfrac{A}{2}\left[\dfrac{\left|w_{i+1,j}-w_{i-1,j}\right|}{(\Delta x)^{2}}+\upsilon\dfrac{\left|w_{i,j+1}-w_{i,j-1}\right|}{(\Delta y)^{2}}\right]\\ \overline{N}_{xy_{i,j}}^{v}=\dfrac{A}{2}(1-\upsilon)\left[\dfrac{2}{\Delta x}\dfrac{\left|w_{i,j+1}-w_{i,j-1}\right|}{2\Delta y}+\dfrac{2}{\Delta y}\dfrac{\left|w_{i+1,j}-w_{i-1,j}\right|}{2\Delta x}\right]\\ \overline{N}_{y_{i,j}}^{v}=\dfrac{A}{2}\left[\dfrac{\left|w_{i,j+1}-w_{i,j-1}\right|}{(\Delta y)^{2}}+\upsilon\dfrac{\left|w_{i+1,j}-w_{i-1,j}\right|}{(\Delta x)^{2}}\right]\\ \overline{M}_{x_{i,j}}=|-D|\left[\dfrac{1+|-2|+1}{(\Delta x)^{2}}+\upsilon\left(\dfrac{1+|-2|+1}{(\Delta y)^{2}}\right)\right]\\ =4D\left(\dfrac{1}{(\Delta x)^{2}}+\dfrac{\upsilon}{(\Delta y)^{2}}\right)\\ \overline{M}_{xy_{i,j}}=|-D|(1-\upsilon)\left(\dfrac{1+|-1|+|-1|+1}{4\Delta x\Delta y}\right)=\dfrac{D(1-\upsilon)}{\Delta x\Delta y}\\ \overline{M}_{y_{i,j}}=|-D|\left[\dfrac{1+|-2|+1}{(\Delta y)^{2}}+\upsilon\left(\dfrac{1+|-2|+1}{(\Delta x)^{2}}\right)\right]\\ =4D\left(\dfrac{1}{(\Delta y)^{2}}+\dfrac{\upsilon}{(\Delta x)^{2}}\right)\end{cases}$$

(۱۸)

آن‌گونه که آمد، می‌توان جرم را دارای دو بخش ثابت و متغیر دانست. به سخن دیگر، برابری‌های زیر برقرارند:

$$\begin{cases}m_{\alpha_{i,j}}=m_{\alpha_{i,j}}^{c}+m_{\alpha_{i,j}}^{v}\\ m_{\alpha_{i,j}}^{c}=\dfrac{\left(t^{a}\right)^{2}}{4}\sum_{j=1}^{k}\left|S_{ij}\right|_{\alpha}^{c}\quad,\quad m_{\alpha_{i,j}}^{v}=\dfrac{\left(t^{a}\right)^{2}}{4}\sum_{j=1}^{k}\left|S_{ij}\right|_{\alpha}^{v}\end{cases}$$

(۱۹)

نماد k شمار گره‌های شبکه‌بندی تفاوت محدود را نشان می‌دهد. میرایی ساختگی، که سبب همگرایی تکرارها می‌شود، از کمینه مقدار جرم ساختگی در هر گره به‌دست می‌آید.

$$c_{\alpha_{i,i}} = m_{\alpha_{i,i}} (F)^{-1} \qquad (۲۰)$$

پیشینیان، مقدار F را برای تغییرشکل‌های کوچک بین ۱۰ تا ۲۰، برای تغییرشکل‌های نه چندان بزرگ از ۱ تا ۳ و برای تغییرشکل‌های خیلی بزرگ بین ۰/۵ و ۱ اختیار نموده‌اند. دراین پژوهش، مقداری برای F در تغییرشکل‌های بزرگ به‌گونه‌ای به‌دست می‌آید که همگرایی را برقرار کند. برای رسیدن به این هدف، اگر رابطهٔ (۱۸) در C^* قرار گیرد، میرایی ثابت $1/F$ به‌دست می‌آید. روش دیگری که این پژوهش به‌کار می‌گیرد، از برابری (۱۹) برای تعیین میرایی گرهی استفاده می‌نماید.

$$C^*_{\alpha_{i,j}} = \frac{m^c_{\alpha_{i,j}} (F)^{-1} t^a}{2m_{\alpha_{i,i}}} \qquad (۲۱)$$

گام‌های روش پیشنهادی به قرار زیراند:

۱- برقرار نمودن شرط‌های نخستین.

۲- به‌دست آوردن جرم و میرایی ساختگی برای هر گره از رابطه‌های (۱۷) و (۱۸) یا (۱۹).

۳- سرعت‌های هر گره، از رابطهٔ (۱۰) به‌دست می‌آید.

۴- بااستفاده از برابری (۱۲)، تغییرمکان‌ها محاسبه می‌گردند.

۵- شرط‌های مرزی تغییرمکان برقرار می‌شوند.

۶- کرنش‌ها و انحناها در دسترس قرار می‌گیرند.

۷- نیروهای داخلی به‌دست می‌آیند.

۸- شرط‌های مرزی نیرویی برقرار می‌شوند.

۹- شرط همگرایی بررسی می‌گردند.

۱۰- اگر ۹ برقرار بود، پاسخ‌ها به‌دست آمده‌اند.

۱۱- در صورت برقرار نبودن ۹، گام‌های ۲ تا ۱۰ تکرار خواهند شد.

شرط‌های مرزی

برای برقراری معادله‌های ایستایی در یکایک گره‌های شبکه، نیاز به وارد کردن شرط‌های مرزی می‌باشد. به سخن دیگر، برای تحلیل هر سازه، افزون بر معادله‌های ایستایی، می‌باید رابطه‌های سازگاری را نیز برقرار کرد. معادله‌های سازگاری از شرط‌های مرزی به‌دست می‌آیند و می‌توان آنها را بر پایهٔ نیروها یا تغییر مکان‌ها نوشت. در حالت کلی، رابطه‌های سازگاری دو بخش دارند. آنها شرط‌های مرزی تغییرمکانی و معادله‌های سازگاری نیرویی هستند. در ادامه، هر یک از این دو دسته بررسی می‌شود.

چنان‌چه گره‌هایی از سازه دارای تغییرمکان‌های مشخص باشند، معادله‌های ایستایی وابسته به آنها را در سامانهٔ کلی نادیده می‌گیرند. به سخن دیگر، نیازی به نوشتن رابطهٔ رهایی پویا در گره‌های دارای تغییرمکان معلوم نیست. در حالت ویژه، می‌توان به تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار اشاره نمود. بنابراین، رابطهٔ ایستایی در این گره‌ها نوشته نمی‌شود. با این روش می‌توان اثر نشست تکیه‌گاهی را وارد کرد. نشست این نقطه‌ها برای یافتن مشتق‌های تغییرمکان گره‌های همسایه وارد می‌گردند و نیازی به برقراری رابطهٔ ایستایی در خود گره نمی‌باشد. نیروهای واکنشی این نقطه‌ها نیز به‌سادگی و با درنظر گرفتن تغییرمکان گره محاسبه می‌شوند. باید افزود، پنداشت تغییرشکل‌های بزرگ یا کوچک، اثری در چگونگی وارد کردن شرط‌های سازگاری تغییرمکان‌ها ندارند.

الگوسازی رفتار پاره‌ای از شرط‌های مرزی، توسط نیروها انجام می‌گیرد. چنانچه در بخشی از سازه مقدار یک یا چند نیرو مشخص باشد، باید اثر این نیروها در رابطه‌های ایستایی وارد شوند. این نیروهای مشخص،

شرط‌های سازگاری نیرویی نام دارند. راهکار کلی و دقیق برقراری شرط‌های سازگاری نیرویی در فن تفاوت‌های محدود، انجام فرآیند حل در دو مرحله می‌باشد. در آغاز بدون وارد کردن شرط‌های سازگاری نیرویی، مسئله حل می‌شود. دومین گام، به برقراری شرط‌های سازگاری نیرویی باز می‌گردد. از این‌رو، فرآیند حل در این مسئله، تنها در مرزها و تکیه‌گاه‌ها انجام می‌پذیرد. در این مرحله، تغییرمکان‌های ساختگی خارج از مرز به‌گونه‌ای تعیین می‌شوند که نیروهای مرزی، شرط‌های سازگاری را برقرار کنند. چنان‌چه پنداشت تغییرشکل‌های کوچک به‌کار رود، دستگاه معادله‌های گام دوم حل، خطی می‌گردد. از سوی دیگر، رفتار تغییرشکل‌های بزرگ، به دستگاه ناخطی منجر می‌شود.

دو روش برای برقراری شرط‌های سازگاری نیرویی وجود دارد. در نخستین راه حل، می‌توان نیروهای مرزی معلوم را به‌صورت سرراست در رابطه‌های ایستایی گره مزبور یا گره‌های همسایه وارد کرد. به سخن دیگر، در هر مرحله از فرآیند حل، بدون توجه به نیروهای به دست آمده از تحلیل تغییرمکانی، مقدارهای معلوم جایگزین می‌گردند. باید دانست، استفاده از چنین راه‌کاری نرخ همگرایی به پاسخ را کاهش می‌دهد و در پاره‌ای از موردها ناپایداری تحلیل را سبب می‌گردد. در فرآیند تفاوت‌های محدود، معادله‌های ایستایی بر پایهٔ عامل‌های ناشناختهٔ تغییرمکانی نوشته می‌شوند. از این‌رو، تمامی شرط‌های مرزی نیز باید بر این پایه وارد گردند. چنان‌چه رفتار صفحه بدون اندرکنش‌های کششی، برشی، خمشی یا پیچشی باشد، می‌توان شرط‌های مرزی را نیز به شکل نیرو وارد کرد. راهکار دیگر برای برقراری شرط‌های سازگاری نیرویی، تبدیل آنها به رابطه‌های هم‌ارز تغییرمکانی می‌باشد. این فن، با توجه به پنداشت‌های تحلیل، به معادله‌های متفاوتی منجر می‌گردد.

عامل F

این بخش، به اثر عامل F در تحلیل صفحه‌ها می‌پردازد. مسئله‌های نمونه از منبع [13] برداشت شده‌اند. عامل F از ۰/۱ تا ۳ و با نمو ۰/۱ اختیار خواهد شد. میرایی متغیر در تحلیل‌ها به‌کار رفته است. باید اشاره گردد که کاربرد میرایی ثابت نیز تفاوتی در نتیجه‌ها ایجاد نمی‌کند. معیار همگرایی به‌کار رفته، خطای سرعت می‌باشد؛ چنان‌چه سرعت در هر سه راستای x، y و z، کوچک‌تر از مقدار خطای مجاز 10^{-5} گردد فرآیند تکرارهای رهایی پویا پایان می‌یابد. بارها در یک نمو وارد شده‌اند. برای برقرار نمودن شرط‌های مرزی نیرویی، الگوسازی دوم به‌کار می‌رود. شبکه‌بندی ریز یا درشت، در همگرایی یا واگرایی پاسخ‌ها با مقدار F ثابت اثر دارد. در تمام نمونه‌ها، به‌جای بار از نسبت qa^4/Dh استفاده می‌شود. عامل q شدت بار جانبی وارد به سازه است. در همهٔ نمونه‌ها، ضریب کشسانی(E)، نسبت پواسون، سفتی خمشی(D)، و ضخامت صفحه(h)، به‌ترتیب، ۱۰۹,۲ گیگاپاسکال، ۰/۳، $۱۰^۴$ نیوتن- متر و ۱ سانتی‌متر اختیار می‌گردند.

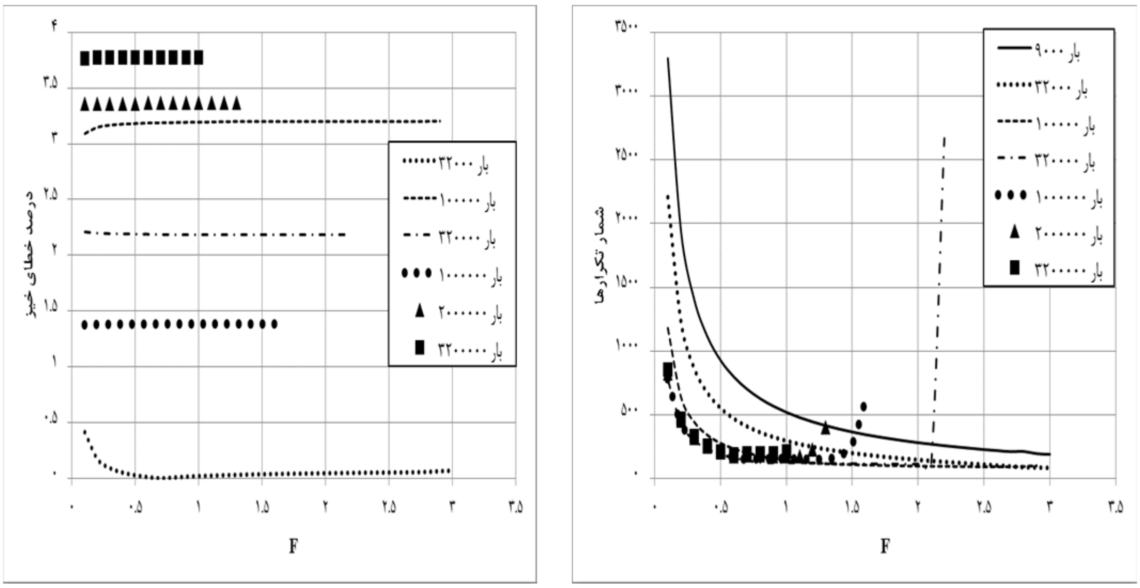
صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده. نخست، به صفحه‌ای مربعی که از چهار سو، بر روی تکیه‌گاه ساده قرار دارد، پرداخته می‌شود. این سازه، زیر هفت بار گستردهٔ یکنواخت جانبی تحلیل می‌گردد. نسبت qa^4/Dh از ۹۰۰۰ تا $۳/۲\times۱۰^۶$ گزیده می‌شود. اندازهٔ پهلوهای صفحه (a) برابر ۴ متر می‌باشد. خیز بیشینه بر پایهٔ نسبت خیز به ضخامت (w/h) می‌آید. برای تحلیل این سازه، شبکه‌بندی ۸×۸ به‌کار رفته است. جدول (۱) مقدارهای دقیق خیز بیشینه را نشان می‌دهد. نتایج تحلیل ناخطی، با مرجع [13] و تحلیل خطی، با مرجع [1] هماهنگی دارد.

شکل (۱)، شمار تکرارهای لازم برای رسیدن به همگرایی لازم را نشان می‌دهد. آشکار است، برای

بارهای کم و تغییرشکل‌های کوچک، افزایش F، شمار تکرارها را کاهش می‌دهد. در بارهای زیاد یا تغییرشکل‌های بزرگ، افزایش F، نخست موجب کاهش تکرارها تا رسیدن به یک مقدار کمینه می‌شود؛ سپس، با افزایش F، شمار تکرارهای همگرایی، کم و بیش ثابت می‌ماند. در ادامه، افزایش این عامل افزایش تکرارهای لازم را به‌دنبال دارد. برای بارهای زیاد که در یک نمو وارد گشته‌اند، چنانچه F از مقداری بیشتر شود همگرایی مورد نیاز به‌دست نمی‌آید و پاسخ‌ها واگرا می‌شوند. برای نمونه، در بار ۳۲۰۰۰ اگر مقدار F از یک بیشتر گردد، همگرایی به‌دست نمی‌آید. برای حل این مشکل دو راه وجود دارد. نخست می‌توان شبکه‌بندی تفاوت محدود را ریزتر نمود؛ گزینهٔ دیگر، وارد کردن بار در نموهای کوچک‌تر است. شکل (۱) نمودار درصد خطا را برای Fها و بارهای مختلف نشان می‌دهد. روشن است، تغییر در عامل F اثر چندانی بر درصد خطا ندارد. درنتیجه، برای به‌دست آوردن F مناسبی که همگرایی در هر باری را برقرار نماید، بررسی شمار تکرارها کافی خواهد بود.

جدول ۱ خیز بیشینه صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده

qa^4/Dh	۹۰۰۰	۳۲۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	۳۲۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰۰	۳۲۰۰۰۰۰
تحلیل ناخطی (w/h)	۰/۲۹	۰/۷۴	۱/۲	۱/۸۷	۲/۸۷	۳/۷	۴/۳۵
تحلیل خطی (w/h)	۰/۳۶۵۴	۱/۲۹۹۲	۴/۰۶	۱۲/۹۹۲	۴۰/۶	۸۱/۲	۱۲۹/۹۲



شکل ۱ شمار تکرارها و درصد خطای صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده

درادامه، به چگونگی برآورد تنش پرداخته می‌شود.

رابطه‌های محاسبهٔ کرنش در زیر نوشته شده‌اند.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - z\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} + 2z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \qquad (۲۲)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{x_{i,j}} = \dfrac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2\Delta x}\right)^2 - z\dfrac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \\ \varepsilon_{y_{i,j}} = \dfrac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta y} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2\Delta y}\right)^2 - z\dfrac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \\ \gamma_{xy_{i,j}} = \dfrac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} + \dfrac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta x} + \dfrac{(w_{i,j+1} - w_{i,j-1})(w_{i+1,j} - w_{i-1,j})}{4\Delta x \Delta y} \\ \qquad + 2z\dfrac{w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}}{4\Delta x \Delta y} \end{cases}$$

در این‌جا، z فاصله از میان تـار مـی‌باشـد. سـپس، برپایۀ رابطه‌هـای هـوک، تـنش‌هـا بـرآورد مـی‌شـوند. برابری‌های (۲۳)، رابطه‌هـای تـنش و کـرنش را نشـان می‌دهد.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\varepsilon_x + \upsilon\varepsilon_y\right) \quad , \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\varepsilon_y + \upsilon\varepsilon_x\right) \quad , \qquad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\upsilon)}\gamma_{xy} \qquad (۲۳)$$

پخش تنش در راستای ضخامت سازه و در جدول (۲) درج می‌شود. این جدول برای نسبت بار ۲×۱۰^{۶} و در مرکز ورق بر پا شده است. بر پایۀ نتیجه‌های تحلیل تنش در راستای ضخامت سازه دارای تقارن نمی‌باشـد. این رفتار، به‌سبب در نظر گرفتن تغییرشکل‌های بـزرگ می‌باشد. خاطرنشان می‌کند، این نتیجه‌ها با مرجع [13] یکسان است.

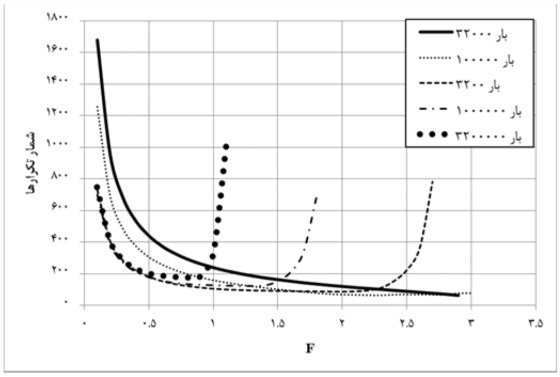
صفحۀ مربعی با تکیه‌گاه‌های گیردار. این سـازه زیـر اثـر پـنج گونـه بارگسـتردۀ یکنواخـت جـانبی تحلیـل می‌گردد. اندازۀ پهلوهای سازه (a) نیز برابر ۴ متر است. شبکه‌بندی ۸×۸ به‌کار می‌رود. آشکار می‌باشد که خیـز بیشینه در مرکز صفحه رخ می‌دهد. نسبت خیـز بیشـینه به ضخامت(w/h) در جدول (۳) می‌آید. نتایج تحلیـل ناخطی، با مرجع [13] و تحلیـل خطـی، بـا مرجـع [1] هماهنگی دارد.

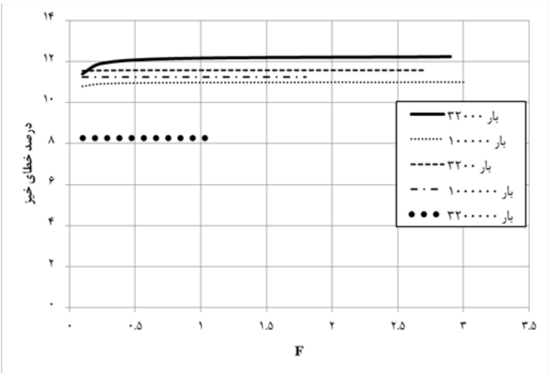
جدول ۲ پخش تنش در راستای ضخامت صفحۀ مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده

فاصله از میان تار	تنش راستای x (مگاپاسکال)	تنش راستای y (مگاپاسکال)	تنش برشی (مگاپاسکال)
−۰/۵t	۱۶/۰۷۲	۱۶/۱۰۳	۰/۸۴۷
−۰/۴t	۱۸/۳۳۴	۱۸/۳۵۷	۰/۸۳۸
−۰/۳t	۲۰/۵۹۷	۲۰/۶۱	۰/۸۲۹
−۰/۲t	۲۲/۸۶۰	۲۲/۸۶۴	۰/۸۲
−۰/۱t	۲۵/۱۲۳	۲۵/۱۱۸	۰/۸۱۱
۰	۲۷/۳۸۶	۲۷/۳۷۱	۰/۸۰۲
۰/۱t	۲۹/۶۴۹	۲۹/۶۲۵	۰/۷۹۴
۰/۲t	۳۱/۹۱۱	۳۱/۸۷۹	۰/۷۸۵
۰/۳t	۳۴/۱۷۴	۳۴/۱۳۲	۰/۷۷۶
۰/۴t	۳۶/۴۳۷	۳۶/۳۸۶	۰/۷۶۷
۰/۵t	۳۸/۷	۳۸/۶۴	۰/۷۵۸

جدول ۳ خیز بیشینه صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های گیردار

qa^4/Dh	۳۲۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	۳۲۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۳۲۰۰۰۰۰
تحلیل ناخطی (w/h)	۰/۳۹	۰/۹۱	۱/۶۵	۲/۶۵	۴/۲
تحلیل خطی(w/h)	۰/۴۰۳۲	۱/۲۶	۴/۰۳۲	۱۲/۶	۴۰/۳۲





شکل ۲ شمار تکرارها و درصد خطای صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های گیردار

جدول ۴ پخش تنش در راستای ضخامت صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های گیردار

فاصله از میان تار	تنش راستای x (مگاپاسکال)	تنش راستای y (مگاپاسکال)	تنش برشی (مگاپاسکال)
۰/۵t−	۱۹/۳۸۵	۱۹/۴۴۱	۰/۲۳۱−
۰/۴t−	۲۲/۲۹۶	۲۲/۳۳۹	۰/۲۶۹−
۰/۳t−	۲۵/۲۰۷	۲۵/۲۳۸	۰/۳۰۷−
۰/۲t−	۲۸/۱۱۷	۲۸/۱۳۷	۰/۳۴۵−
۰/۱t−	۳۱/۰۲۸	۳۱/۰۳۶	۰/۳۸۴−
۰	۳۳/۹۳۹	۳۳/۹۳۴	۰/۴۲۲−
۰/۱t	۳۶/۸۵	۳۶/۸۳۳	۰/۴۶−
۰/۲t	۳۹/۷۶۱	۳۹/۷۳۲	۰/۴۹۸−
۰/۳t	۴۲/۶۷۲	۴۲/۶۳۱	۰/۵۳۶−
۰/۴t	۴۵/۵۸۲	۴۵/۵۲۹	۰/۵۷۵−
۰/۵t	۴۸/۴۹۳	۴۸/۴۲۸	۰/۶۱۳−

شکل (۲) شمار تکرارها برای رسیدن بـه پاسـخ و درصد خطای هـر بـار را در برابـر F نشـان مـی‌دهـد. چگونگی تغییر شمار تکرارهـا و درصـد خطـا هماننـد نمونهٔ پیشین است. در این سازه، چنان‌چه F از مقداری بیشتر گردد، همگرایی به‌دست نمی‌آید و پاسخ‌ها واگرا می‌شوند. ایـن مقـدار، بـرای بارهـای ۳۲۰۰، ۱۰۰۰۰ و ۳۲۰۰۰، به‌ترتیب، ۲/۷، ۱/۹ و ۱/۱ می‌باشد. نتیجه‌هـای نمونهٔ نخست و دوم نشان داد که اگر نسـبت خیـز بـه ضخامت از یک تجاوز کند، با افزایش F، پاسخ‌ها واگرا می‌شوند. هم‌چنین، درصد خطا ثابت است و تغییـر در ضریب F ، اثر چندانی بر آن ندارد. درنتیجه، یافتن یک F مناسب با بررسی شمار تکرارها انجام می‌پذیرد.

پخش تنش در راستای ضخامت سازه در جدول (۴) درج می‌شود. این جدول برای نسبت بار ۳/۲×۱۰۶ مرکز ورق بر پا شده است. باید افزود، این نتیجه‌ها با مرجع [13] یکسان است.

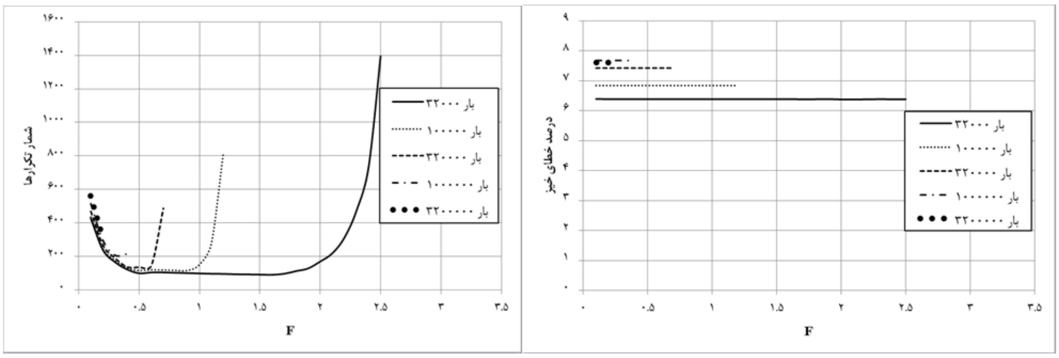
صفحهٔ بی‌نهایت با تکیه‌گاه‌های ساده. این سازه در جهت y بی‌نهایت است. اندازهٔ پهلوی صفحه در جهت x (a) برابر ۴ متر و در جهت y (b) برابر ۵۰ متر اختیار می‌شود. شبکه‌بندی ۵۰×۴ به‌کار می‌رود. نسبت خیز به ضخامت (w/h) در جدول (۵) می‌آید. نتایج تحلیل ناخطی، با مرجع [13] و تحلیل خطی، با مرجع [1] هماهنگی دارد.

بر پایهٔ شکل (۳)، چگونگی تغییر شمار تکرارهای رهایی پویا و درصد خطا در برابر تغییر F مانند نمونه‌های پیشین است. چنانچه نسبت خیز به ضخامت از یک تجاوز کند، با افزایش F پاسخ‌ها واگرا می‌شوند. آشکار می‌شود که هم‌چون سازه‌های پیشین، تغییر در ضریب F اثر چندانی بر درصد خطا ندارد.

صفحهٔ چهارپهلو با تکیه‌گاه‌های ساده. نمونهٔ چهارم، همان صفحهٔ نخست ولی با شبکه‌بندی‌های گوناگون است. این سازه، زیر اثر بار گسترده‌ای قرار دارد که نسبت qa^4/Dh آن برابر با ۳۲۰۰۰۰۰ می‌باشد. نسبت پهلوها، ۱، ۱,۲۵، ۱,۵، ۱,۷۵ و ۲ اختیار می‌شوند. اندازهٔ پهلوی کوچک‌تر، برابر ۴ متر است. خیز بیشینه در مرکز روی می‌دهد. شبکه‌بندی‌ها به‌گونه‌ای می‌باشند که نسبت اندازهٔ پهلوی هر شبکه به پهلوی صفحه‌ها در همان راستا، برابر با ۰/۲۵ گردد. در جدول (۶) نسبت خیز به ضخامت (w/h) می‌آید. نتایج با مرجع [13] هماهنگی دارد.

جدول ۵ خیز مرکز صفحهٔ بی‌نهایت با تکیه‌گاه‌های ساده

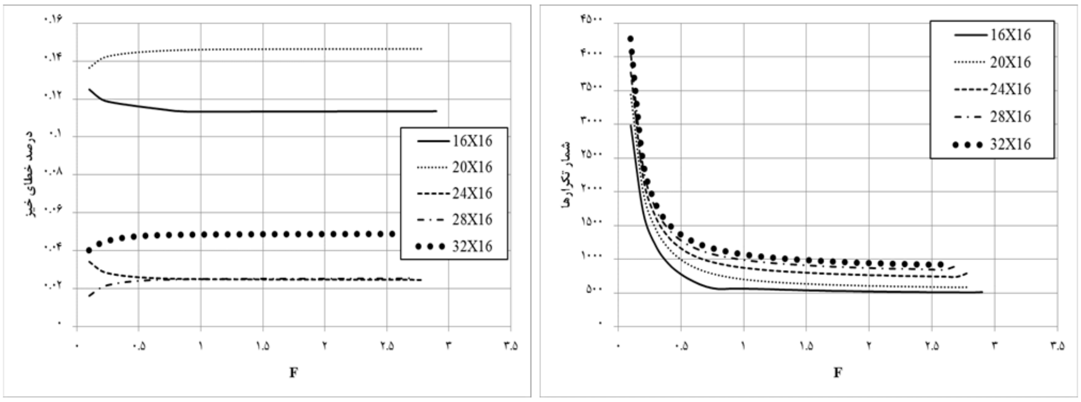
qa^4/Dh	۳۲۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	۳۲۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۳۲۰۰۰۰۰
تحلیل ناخطی(w/h)	۱/۰۱	۱/۵۴	۲/۳	۳/۳۸	۵
تحلیل خطی(w/h)	۰/۸۲	۲/۵۶	۸/۱۸	۲۵/۵۷	۸۱/۸۱



شکل ۳ شمار تکرارها و درصد خطای صفحهٔ بی‌نهایت با تکیه‌گاه‌های ساده

جدول ۶ خیز بیشینه صفحهٔ چهارپهلو و تکیه‌گاه‌های ساده

شبکه‌بندی	۱۶×۱۶	۲۰×۱۶	۲۴×۱۶	۲۸×۱۶	۳۲×۱۶
بیشینهٔ خیز (w/h)	۴/۱۲۱	۴/۶۲۵	۴/۸۴	۴/۹۳۵	۴/۹۷۴



شکل ۴ شمار تکرارها و درصد خطای صفحهٔ چهارپهلو و تکیه‌گاه‌های ساده

همان‌گونه که اشاره شد، یکی از گزینه‌های از بین بردن واگرایی پاسخ‌ها در مقدارهای بالای F و یا بار، ریز نمودن شبکه‌بندی تفاوت محدود است. مقایسهٔ شبکه‌بندی ۸×۸ برای نسبت بار ۳۲۰۰۰۰۰ در شکل (۱) با شبکه‌بندی ۱۶x۱۶ شکل (۴)، آشکار می‌سازد که با ریز نمودن شبکه‌بندی، با وجود مقدار زیاد برای F، همگرایی به‌دست می‌آید. این پژوهش ثابت نمود که اگر نسبت اندازهٔ پهلوی یک جزء از شبکه‌بندی به پهلوی صفحه در آن راستا ۰٫۲۵ باشد، همگرایی برای Fها حتی در بارهای زیاد برقرار خواهد بود. این همگرایی، در صورت استفاده از یک نمو بارگذاری نیز وجود دارد. نتیجه‌های نمونه‌های پیشین، برای این مسئله نیز برقرار است.

صفحهٔ مربعی با ضخامت متفاوت و تکیه‌گاه‌های ساده. نمونهٔ پنجم، دربرگیرندهٔ صفحه‌ای مربعی با ضخامت متفاوت در راستای y است. حل این گونه از سازه‌ها، اثر سفتی خمشی را آشکار می‌کند. در چهار سوی ورق، تکیه‌گاه ساده قرار دارد. تغییر سفتی خمشی سازه به‌صورت نمایی پنداشته می‌شود. به سخن دیگر، تابع سفتی خمشی $D = D_0 e^{\lambda y}$ به‌کار می‌رود. سفتی خمشی صفحه در مرکز برابر با D_0 است. ضریب λ به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که مقدار سفتی در لبه های y=0,b، هشت برابر سفتی خمشی صفحه در مرکز باشد. برای نسبت qa^4/Dh، سه مقدار ۵۰۰۰۰، ۱۰۰۰۰۰ و ۱۵۰۰۰۰ گزینش می‌شود. اندازهٔ پهلوهای سازه (a)، ۴ متر می‌باشد. شبکه‌بندی ۱۶×۱۶ به‌کار می‌رود. نسبت خیز به ضخامت (w/h) در جدول (۷) می‌آید. نتایج با مرجع [13] هماهنگی دارد.

جدول ۷ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با سفتی متفاوت و تکیه‌گاه‌های ساده

qa^4/Dh	۵۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰
بیشینه خیز (w/h)	۰/۵۸	۰/۹	۱/۱۱

شکل (۵) شمار تکرارها برای رسیدن به همگرایی و درصد خطای موجود در پاسخ را برای این مسئله نشان می‌دهد. آشکار است، افزایش F شمار تکرارها را کاهش می‌دهد. تفاوت این فرآیند با نمونه‌های پیشین را می‌توان به شبکه‌بندی ریزتر پیوند داد. افزایش F، نخست درصد خطا را کاهش و سپس افزایش می‌دهد؛ گرچه برای مقدار F بیشتر از ۰/۵٪، این کاهش و افزایش ناچیز می‌باشد و می‌توان درصد خطا را کم و بیش ثابت پنداشت.

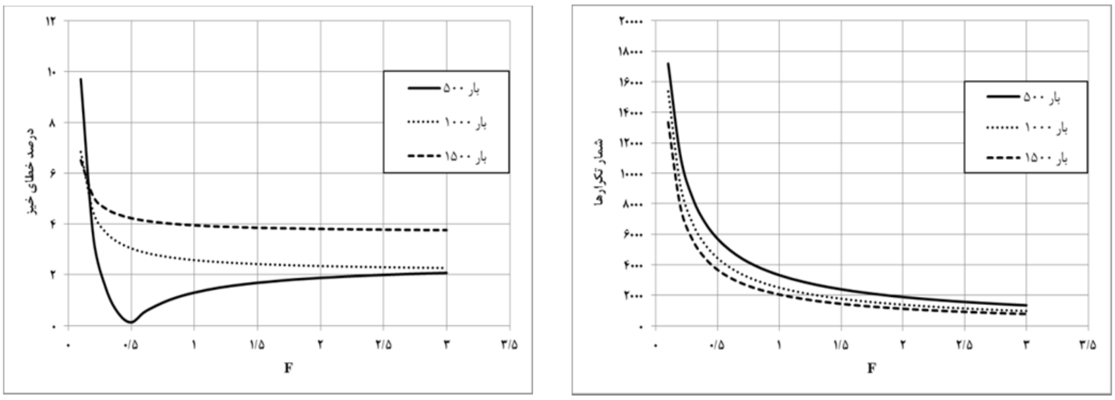
صفحهٔ مربعی با ضخامت گوناگون و تکیه‌گاه‌های ساده- گیردار. این نمونه مشابه مسئلهٔ پنجم است و تنها تکیه‌گاه‌های آن تفاوت دارد. این سازه بر روی سه تکیه‌گاه ساده و یک تکیه‌گاه گیردار می‌باشد. مقدارهای دقیق خیز مرکز صفحه در جدول (۸) آمده است. نتیجه‌هایی همانند نمونهٔ پیشین را شکل (۶) به نمایش می‌گذارد. نتایج با مرجع [13] هماهنگی دارد.

بر پایهٔ تجربه‌های عددی، می‌توان برپایهٔ میزان خیز در تغییرشکل‌های بزرگ صفحه‌ها، مقدارهای زیر را برای F به‌کار برد:

۱- در تغییرشکل‌های کوچک که نسبت خیز به ضخامت کمتر از ۱/۵ می‌باشد: ۲ تا F=۳

۲- درتغییرشکل‌های نه چندان بزرگ که نسبت خیز به ضخامت بین ۱/۵ و ۲ است: ۱٫۵ تا F=۲

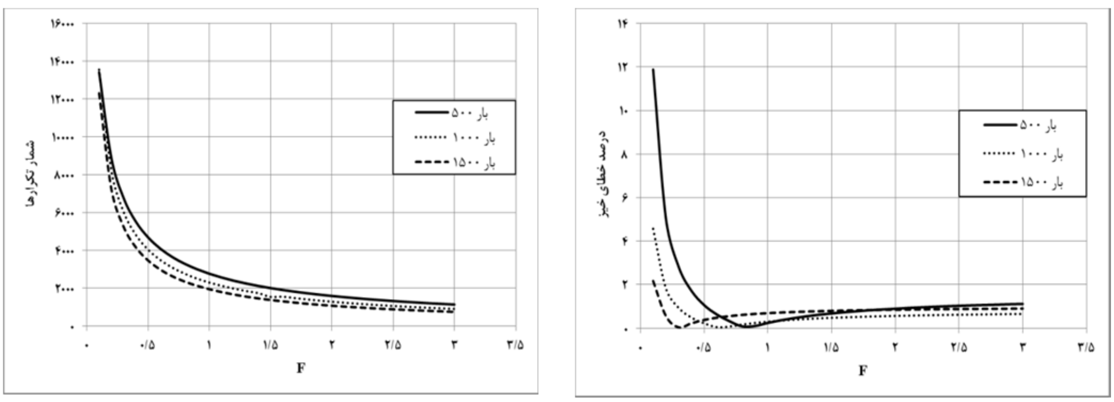
۳- در تغییرشکل‌های بزرگ که نسبت خیز به ضخامت بیشتر از ۲ می‌باشد: ۰/۵ تا F=۱



شکل ۵ شمار تکرارها و درصد خطای صفحهٔ مربعی با سفتی متفاوت و تکیه‌گاه‌های ساده

جدول ۸ خیز مرکز صفحهٔ مربعی با سفتی و تکیه‌گاه گوناگون

qa^4/Dh	۵۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰
بیشینه خیز (w/h)	۰/۴۴	۰/۷۲	۰/۹۱



شکل ۶ شمار تکرارها و درصد خطای صفحهٔ مربعی با سفتی و تکیه‌گاه گوناگون

میرایی ثابت و متغیر

برای مقایسهٔ اثرمیرایی ثابت و متغیر بر سرعت همگرایی، همان نمونه‌های پیشین به‌کار خواهد رفت. برای بررسی اثر میرایی متغیر، از خطای سرعت، کارمایهٔ جنبشی و نسبت تغییرمکان دو گام پیاپی، برای معیار همگرایی تمامی تحلیل‌ها بهره‌جویی می‌شود. برای معیار سرعت، چنان‌چه سرعت در هر سه راستای x، y و z، کوچک‌تر از مقدار خطای مجاز 10^{-5} گردد، فرآیند تکرارهای رهایی پویا پایان می‌یابد. بر پایهٔ نتیجه‌های بخش پیشین، مقدار F برابر ۰/۷۵ اختیار می‌گردد. در این مقاله، شمار تکرارهای رهایی پویا و نیز زمان کل تحلیل برای مقایسه به‌کار می‌روند.

نسبت qa^4/Dh از ۱۰۰۰۰۰ تا ۴۰۰۰۰۰۰ تغییر می‌کند و بار در ۴۰ نمو به سازه وارد خواهد شد. از پاسخ‌های نمو پیشین نیز برای سرعت بخشیدن به همگرایی استفاده می‌شود. بار و خیز در تمامی جدول‌ها و شکل‌ها، به‌ترتیب، نسبت qa^4/Dh و نسبت خیز به ضخامت (w/h) می‌باشند. پس از این و برای سادگی، معیار تغییرمکان به جای نسبت جابه‌جایی دو گام پیاپی از تکرارها به‌کار می‌رود. خطای مجاز دو معیار همگرایی دیگر، با فرآیند آزمون و خطا در دسترس قرار گرفت؛ به گونه‌ای که مقدار خیز در بیشینه بار معیار مورد بررسی و معیار سرعت یکسان شود. تجربه‌های عددی آشکار نمود که درصد تفاوت مقدار خیز معیار انتخابی و معیار سرعت در سایر بارها، کمتر از ۰/۱ درصد و در بسیاری از موارد، بسیار کمتر از این مقدار بود. هم‌چنین، مقدار نیروهای داخلی نیز بسیار به یکدیگر نزدیک بودند. از معیار همگرایی تغییرمکان زیر بهره‌جویی می‌شود:

$$\left| \frac{\left(\alpha^{i+1}\right)^T \alpha^{i+1} - \left(\alpha^{i}\right)^T \alpha^{i}}{\left(\alpha^{i+1}\right)^T \alpha^{i+1}} \right| \le \varepsilon \qquad , \qquad i = 1,2,\ldots,\text{ndof}$$

در این رابطه، نماد α جابه‌جایی در راستای x، y و z را نشان می‌دهد. خطای مجاز برابر با ε است. یادآوری می‌کند، عامل ndof شمار درجه‌های آزادی را نشان می‌دهد. بر پایهٔ معیار تغییرمکان، هنگامی که رابطهٔ کنونی برای هر سه راستا و در تمام گره‌های شبکهٔ تفاوت محدود برقرار بود، فرآیند تکرارهای رهایی پویا به سرانجام می‌رسد. از سوی دیگر، برای معیار همگرایی کارمایهٔ جنبشی، نابرابری زیر به‌کار می‌رود:

$$\left[\sum_{i=1}^{k} m_u \left(\dot{x}\right)_u^2 + \sum_{i=1}^{k} m_v \left(\dot{x}\right)_v^2 + \sum_{i=1}^{k} m_w \left(\dot{x}\right)_w^2 \right] \le \varepsilon$$

در این نابرابری، شمار گره‌ها با k و جرم و سرعت ساختگی هر گره، به ترتیب، با m و $\dot{x}$ نشان داده می‌شوند. بر پایهٔ این معیار، اگر جمع کارمایهٔ جنبشی هر سه راستا کمتر از خطای مجاز باشد، همگرایی به‌دست می‌آید. آشکار است که این جمع از تمام گره‌های شبکه‌بندی نتیجه می‌شود.

صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده. نخست، صفحهٔ مربعی بر روی تکیه‌گاه‌های ساده تحلیل می‌گردد. اندازهٔ پهلوهای سازه نیز برابر ۴ متر است. از شبکه‌بندی ۱۶x۱۶بهره‌جویی می‌شود. زمان و شمار کل تکرارهای تحلیل در جدول (۹) می‌آید. میرایی متغیر ۱ و ۲، به‌ترتیب، معیار همگرایی سرعت و نسبت تغییرمکان دو گام پیاپی می‌باشند. جدول (۹) آشکار می‌سازد، خطای مجازی وجود ندارد که خیز در بیشینه بار برای معیار کارمایهٔ جنبشی را برابر با خیز در بیشینه بار معیار سرعت کند. بر پایهٔ نتیجه‌های این جدول، اگر از میرایی متغیر به‌جای میرایی ثابت استفاده شود، ۱۵ درصد زمان و ۱۳ درصد در شمار تکرارها کاهش به‌وجود می‌آید. از سوی دیگر، مقایسهٔ معیار همگرایی سرعت و تغییرمکان، برتری معیار تغییرمکان در کاهش بیشتر زمان تحلیل و شمار تکرارها را نشان می‌دهد.

در این نمونه، خطای مجاز برای معیار تغییرمکان

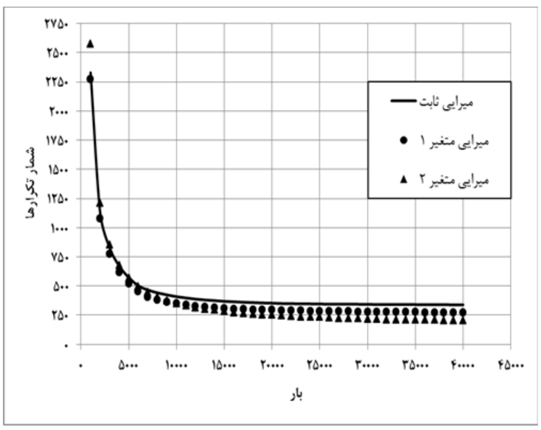
1.1×10^{-5} به‌دست آمد. چون باید دقت هر روش نیز بررسی شود، نیاز به پاسخ دقیق در هر نمو بارگذاری می‌باشد که در دسترس نیست. شکل (۷) نشان می‌دهد که نمودارهای خیز برروی هم قرار دارند. درنتیجه، دقت سه روش یکسان خواهد بود. نتایج با مرجع [13] هماهنگی دارد.

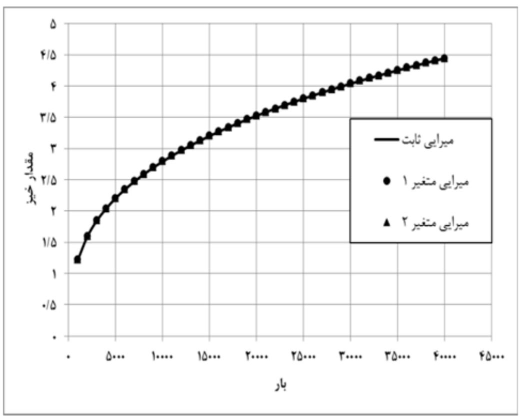
سازهٔ بی‌نهایت با تکیه‌گاه‌های ساده

صفحهٔ بی‌نهایتی در جهت y با تکیه‌گاه‌های ساده تحلیل می‌گردد. اندازهٔ پهلوی صفحه درجهت x برابر با ۴ متر و درجهت y برابر با ۵۰ است. شبکه‌بندی ۱۰۰×۸ به‌کار می‌رود. زمان کل تحلیل و شمار تکرارها، همانند جدول (۱۰) است. میرایی متغیر ۳، به معیار همگرایی کارمایهٔ جنبشی اشاره دارد. در این نمونه، خطای مجاز برای معیار تغییرمکان و کارمایهٔ جنبشی، به‌ترتیب، 3.3×10^{-6} و 7×10^{-8} به‌دست آمد. این خطاهای مجاز به خیز یکسانی برای هر سه معیار همگرایی میرایی متغیر در تمامی بارها می‌انجامد. پاسخ‌های جدول (۱۰) آشکار می‌کند که استفاده از میرایی متغیر اثر چندانی بر نرخ همگرایی ندارد. با وجود این، موجب کاهش ناچیزی در زمان و شمار تکرارها می‌شود. مقایسهٔ معیارهای همگرایی متفاوت برای میرایی متغیر نشان می‌دهند که معیار سرعت و کارمایهٔ جنبشی، کم و بیش رفتار یکسانی را از خود به نمایش می‌گذارند. برخلاف آن، معیار تغییرمکان موجب کاهش نرخ همگرایی و افزایش زمان تحلیل و شمار تکرارها می‌شود. نمودار خیز و شمار تکرارها در برابر بار همانند شکل (۸) است. در این‌جا نیز دقت هر چهار روش یکسان می‌باشد. نتایج با مرجع [13] هماهنگی دارد.

جدول ۹ زمان و شمار کل تکرارهای تحلیل صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده

گونهٔ میرایی	میرایی ثابت	میرایی متغیر ۱	میرایی متغیر ۲
شمار کل تحلیل	۱۸۳۵۰	۱۵۹۰۷	۱۵۱۹۱
زمان کل تحلیل (ثانیه)	۵۱۴/۰۹۳	۴۳۹/۳۵۹	۴۲۲/۷۳۵

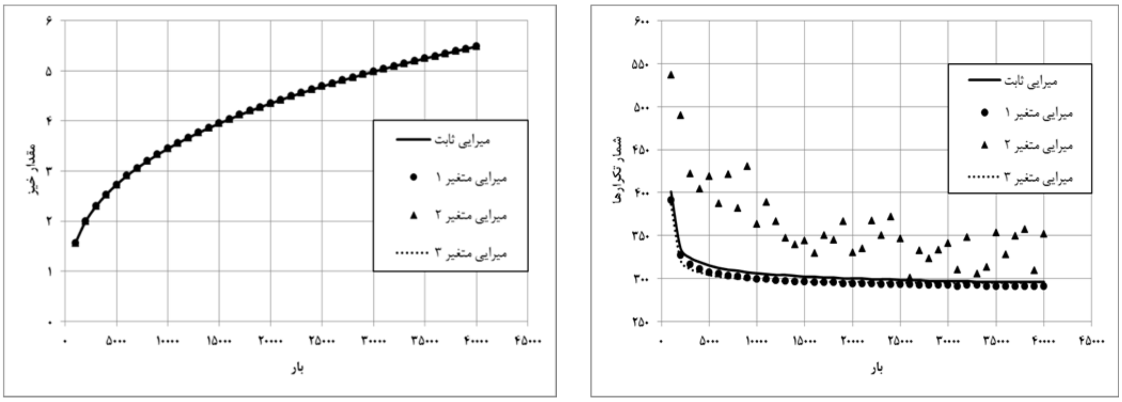




شکل ۷ شمار تکرارها و خیز بیشینهٔ صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده

جدول ۱۰ زمان کل تحلیل و شمار تکرارهای صفحهٔ بی‌نهایت با تکیه‌گاه ساده

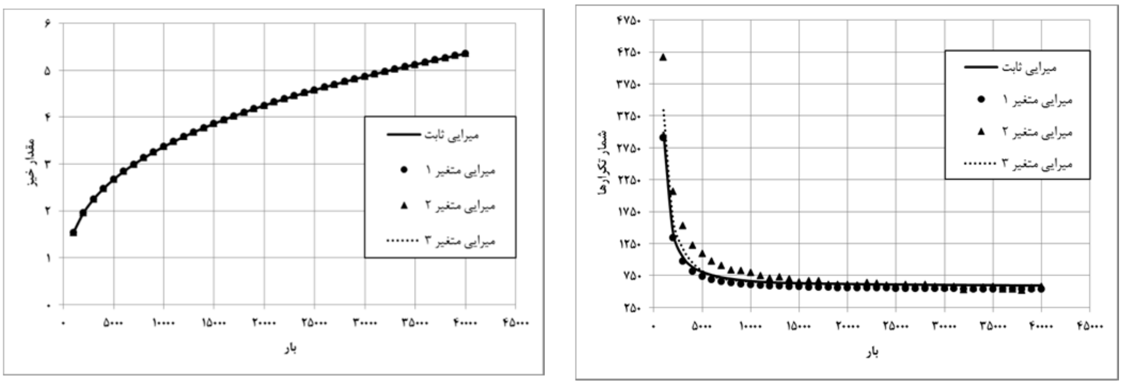
گونهٔ میرایی	میرایی ثابت	میرایی متغیر ۱	میرایی متغیر ۲	میرایی متغیر ۳
شمار کل تحلیل	۱۲۲۰۴	۱۱۹۶۱	۱۴۴۸۴	۱۱۹۹۷
زمان کل تحلیل (ثانیه)	۱۱۴۲/۹۲۲	۱۰۹۸/۳۴۴	۱۲۵۸/۲۰۴	۱۰۶۲/۳۴۴



شکل ۸ شمار تکرارها و خیز بیشینهٔ صفحهٔ بی‌نهایت با تکیه‌گاه ساده

جدول ۱۱ زمان کل تحلیل و شمار تکرارهای صفحهٔ چهارپهلو با تکیه‌گاه‌های ساده

گونهٔ میرایی	میرایی ثابت	میرایی متغیر ۱	میرایی متغیر ۲	میرایی متغیر ۳
شمار کل تحلیل	۲۸۹۶۱	۲۶۴۹۸	۳۲۴۷۰	۲۹۵۶۱
زمان کل تحلیل (ثانیه)	۱۶۲۵/۳۵۹	۱۴۹۶/۰۳۱	۱۷۵۱/۷۶۵	۱۶۱۲/۱۷۲



شکل ۹ شمار تکرارها و مقدار خیز مرکز صفحهٔ چهارپهلو با تکیه‌گاه‌های ساده

صفحه‌های چهارپهلو با شبکه‌بندی‌های گوناگون. صفحه‌های چهار پهلویی با نسبت پهلوهای ۱/۲۵، ۱/۵، ۱/۷۵ و ۲ در این بخش بررسی می‌شود. شبکه‌بندی‌ها به‌گونه‌ای به‌کار می‌روند که نسبت اندازهٔ پهلوی شبکه به پهلوی صفحه در همان راستا برابر ۰/۲۵ باشد. اندازهٔ پهلوی کوچک‌تر برابر با ۴ متر است.

به‌دلیل یکسان بودن رفتار این صفحه‌ها، تنها نتیجه‌های صفحه‌ای با نسبت پهلوی ۲ و شبکه‌بندی

۳۲×۱۶ می‌آید. خطای مجاز بـرای معیـار تغییرمکـان و کارمایهٔ جنبشی برای این نمونه، به‌ترتیب، 5.7×10^{-7} و 4×10^{-6} به‌دست آمدند. پاسـخ‌هـای ایـن سـازه را جدول (۱۱) و شکل (۹) نشان می‌دهند.

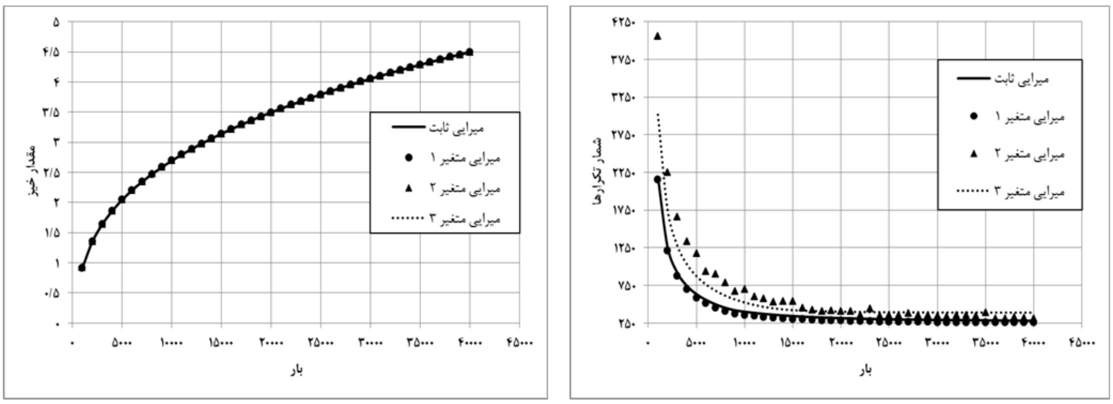
بـر پایـهٔ جـدول (۱۱)، میرایـی متغیـر بـا معیـار همگرایی سرعت، کاراترین فن بین راه‌کارها مـی‌باشـد. این معیار، سبب ۱۰ درصـد کـاهش در زمـان و شـمار تکرارهای تحلیل مـی‌شـود. بایـد افـزود، ایـن کـاهش کمترین مقدار در بین این چهـار صـفحه اسـت. بـرای نمونه، در صفحه‌ای با نسبت پهلوی ۱/۲۵ و شبکه‌بندی ۲۰x۱۶، مقدار کاهش بـه ۱۵ درصـد مـی‌رسـد. شـیوهٔ میرایی متغیر با معیار تغییرمکـان نیـز موجـب افـزایش زمان و شمار تکرارها مـی‌گـردد. بـر پایـهٔ شـکل (۹)، خطاهای مجاز، خیز یکسـانی را بـرای هـر سـه معیـار همگرایی میرایی متغیر می‌دهند. درنتیجه، دقت این سـه معیار یکسان خواهد بود. نتایج با مرجع [13] هماهنگی دارد.

صفحهٔ مربعی با تکیه‌گاه‌های گیردار. پاسخ صفحه‌ای مربع‌شکل بر روی تکیه‌گاه‌های گیردار به‌دست می‌آیـد. اندازهٔ پهلوهای صفحه نیز برابر ۴ متر اختیار می‌شود. از شبکه‌بندی ۱۶×۱۶ بهره‌جویی شده است.

شکل (۱۲) و جدول (۱۲) آشـکار مـی‌سـازند کـه استفاده از معیار همگرایـی سـرعت در میرایـی متغیـر، بهترین کارکرد را دارد. این معیـار، در زمـان تحلیـل و شمار تکرارها کاهش ۱۰ درصدی را موجب می‌گـردد؛ برخلاف آن، معیار تغییرمکان، افزایش بسیاری در شمار تکرارها را در پی دارد. شکل (۱۰) نشان مـی‌دهـد هـر سه معیار همگرایی در میرایی متغیر، دقـت یکسـانی را دارا می‌باشند. نتایج با مرجع [13] هماهنگی دارد.

جدول ۱۲ زمان کل تحلیل و شمار تکرارهای صفحهٔ مربعی روی تکیه‌گاه‌های گیردار

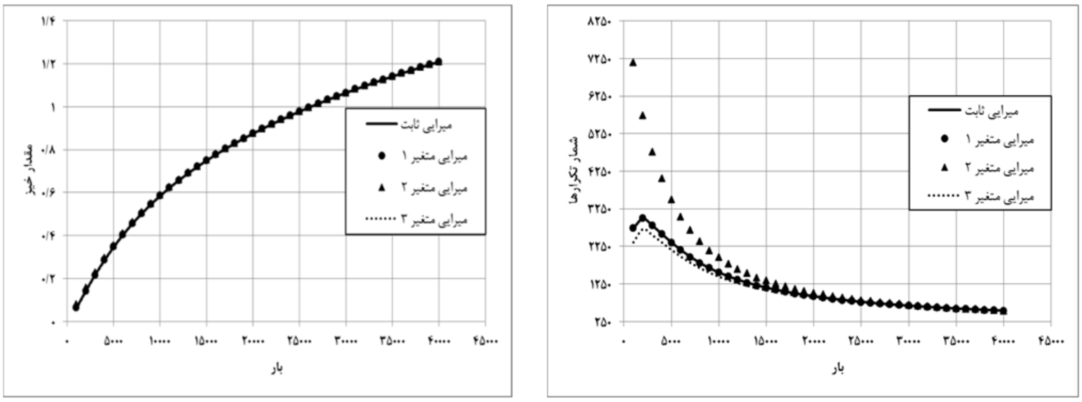
گونهٔ میرایی	میرایی ثابت	میرایی متغیر ۱	میرایی متغیر ۲	میرایی متغیر ۳
شمار کل تحلیل	۱۷۳۳۷	۱۵۸۸۰	۲۶۳۶۴	۲۳۲۰۲
زمان کل تحلیل (ثانیه)	۴۹۲/۸۹۱	۴۴۹/۲۹۷	۷۴۱/۶۵۷	۶۵۸/۹۶۹



شکل ۱۰ شمار تکرارها و مقدار خیز بیشینهٔ صفحهٔ مربعی روی تکیه‌گاه‌های گیردار

جدول ۱۳ زمان کل تحلیل و شمار تکرارها برای صفحهٔ مربعی با ضخامت متفاوت و تکیه‌گاه ساده

گونهٔ میرایی	میرایی ثابت	میرایی متغیر ۱	میرایی متغیر ۲	میرایی متغیر ۳
شمار کل تحلیل	۴۷۷۹۴	۴۷۳۹۹	۶۴۷۸۰	۴۴۵۵۵
زمان کل تحلیل (ثانیه)	۱۳۴۹/۷۸۱	۱۳۵۰/۳۵۹	۱۸۵۶/۱۴	۱۲۴۱/۵۹۴



شکل ۱۱ شمار تکرارها و مقدار خیز مرکز صفحهٔ مربعی با ضخامت گاه متفاوت و تکیه‌گاه ساده

صفحهٔ مربعی با ضخامت متغیر و تکیه‌گاه‌های ساده. در این تحلیل، صفحه‌ای مربعی با سفتی خمشی گوناگون در راستای y بررسی می‌شود. ورق از چهار سو، روی تکیه‌گاه ساده قرار دارد. تغییر سفتی خمشی سازه به‌صورت نمایی است. به سخن دیگر، سفتی خمشی با تابع $D = D_0 e^{\lambda y}$ تغییر می‌کند. سفتی خمشی صفحه در مرکز D_0 است. ضریب λ به گونه‌ای پیدا می‌شود که مقدار سفتی در لبه‌های y=0,b، هشت برابر سفتی خمشی صفحه در مرکز باشد. مقدارهای سفتی خمشی(D_0) و ضخامت سازه(h)، برابر یک اختیار می‌شوند. اندازهٔ پهلوهای صفحه (a) برابر ۴ متر می‌باشند. شبکه‌بندی ۱۶x۱۶ به‌کار می‌رود. جدول (۱۳) و شکل (۱۱)، نتیجه‌ها را نشان می‌دهند. خطای مجاز برای معیار تغییرمکان و کارمایهٔ جنبشی، به‌ترتیب، 4.3×10^{-5} و 4.675×10^{-5} می‌باشند. بر پایهٔ جدول (۱۳) و برخلاف آن چه تاکنون آمد، میرایی ثابت و میرایی متغیر براساس معیار سرعت، رفتار یکسانی از خود نشان می‌دهند. میرایی متغیر بر پایهٔ کارمایهٔ جنبشی، بیشترین کارایی را دارد و سبب کاهش ۹ درصدی در زمان و شمار تکرارها می‌شود. نتایج با مرجع [13] هماهنگی دارد.

شکل (۱۱) آشکار می‌سازد که با خطای مجاز انتخابی، خیز دو معیار تغییرمکان و کارمایهٔ جنبشی در بارهای کم، متفاوت از خیز معیار سرعت می‌باشد. با افزایش بار، خیزهای سه معیار برابر می‌شوند و دقت این سه معیار یکسان می‌گردد. باید افزود، با افزایش بار، هر سه معیار میرایی متغیر به نتیجه‌های میرایی ثابت همگرا می‌شوند.

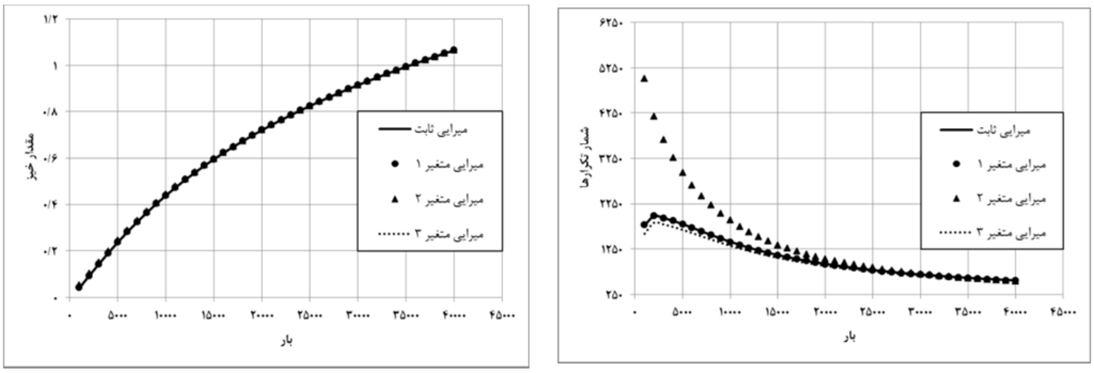
صفحهٔ مربعی با ضخامت متغیر و تکیه‌گاه‌های ساده-گیردار. این صفحه همانند نمونهٔ پیشین می‌باشد؛ تنها اختلاف آن، قرارگیری بر سه تکیه‌گاه ساده و یک تکیه‌گاه گیردار است. اندازهٔ پهلوهای سازه برابر ۴ متر می‌باشند. شبکه‌بندی ۱۶×۱۶ به‌کار می‌رود. جدول (۱۴) و شکل (۱۲)، پاسخ‌ها را نشان می‌دهند. خطای مجاز برای معیار تغییرمکان و کارمایهٔ جنبشی، به‌ترتیب، 4.89×10^{-5} و 3.7×10^{-5} می‌باشند. نتایج با مرجع [۱۳] هماهنگی دارد. همان‌گونه که از جدول (۱۴) و شکل (۱۲) برمی‌آید، نتیجه‌ها مانند نمونهٔ پیشین است.

صفحهٔ چهارگوش سوراخ دار. اکنون، صفحهٔ چهارپهلو دارای بازشو بررسی می‌شود. شکل (۱۳) آن را نمایش می‌دهد. این نمونه، پیش از این، تحلیل نشده است. خط‌چین‌ها، تکیه‌گاه ساده را نشان می‌دهند. سایر مرزها، گیردار هستند. بررسی این صفحه با شبکه‌بندی ۲۰×۲۰ انجام می‌پذیرد. برای این نمونه، بار در ۱۰ گام

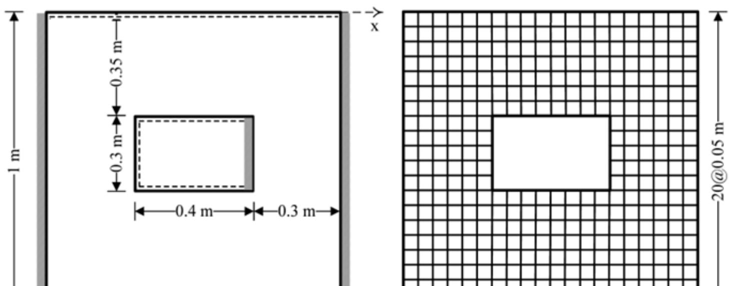
وارد می‌شود. بیشینه عامل بدون بُعد بار برابر ۵۰۰۰ می‌باشد. جدول (۱۵) و شکل (۱۶)، پاسخ‌ها را نشان می‌دهند. خطای مجاز برای معیار تغییرمکان و کارمایهٔ جنبشی، به‌ترتیب، 4×10^{-5} و 3×10^{-5} می‌باشند.

جدول ۱۴ زمان کل تحلیل و شمار تکرارهای صفحهٔ مربعی با سفتی و تکیه‌گاه گوناگون

گونهٔ میرایی	میرایی ثابت	میرایی متغیر ۱	میرایی متغیر ۲	میرایی متغیر ۳
شمار کل تحلیل	۴۲۱۵۳	۴۱۸۵۷	۵۷۸۷۴	۳۹۸۳۸
زمان کل تحلیل (ثانیه)	۱۱۷۷/۷۰۳	۱۱۹۲/۶۵۷	۱۶۵۶/۸۴۴	۱۱۷۶/۷۱۸



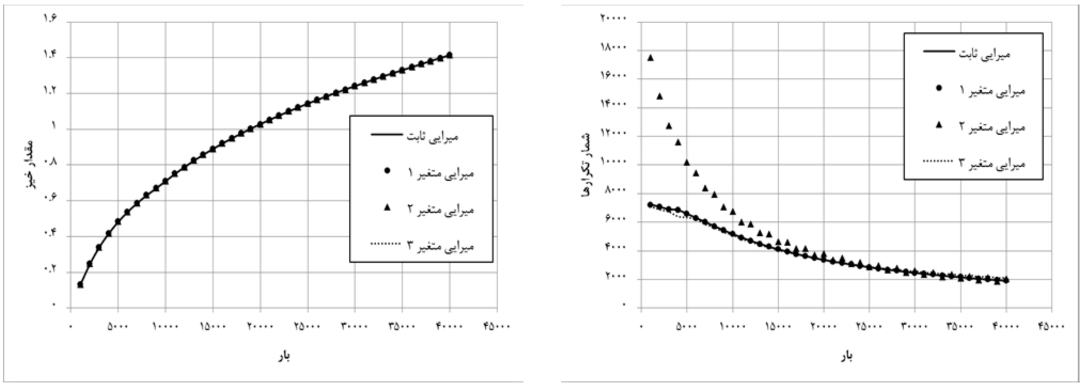
شکل ۱۲ شمار تکرارها و خیز مرکز صفحهٔ مربعی با سفتی و تکیه‌گاه گوناگون



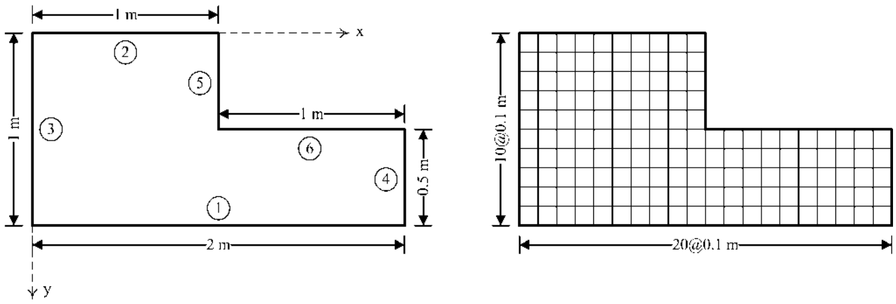
شکل ۱۳ هندسهٔ صفحهٔ چهارگوش سوراخ دار

جدول ۱۵ زمان کل تحلیل و شمار تکرارهای صفحهٔ چهارگوش سوراخ دار

گونهٔ میرایی	میرایی ثابت	میرایی متغیر ۱	میرایی متغیر ۲	میرایی متغیر ۳
شمار کل تحلیل	۱۵۴۰۸۲	۱۵۳۰۸۸	۲۰۵۰۴۷	۱۵۲۹۸۸
زمان کل تحلیل (ثانیه)	۲۹۴۴/۱۲۵	۲۸۹۶/۴۲	۳۷۴۱/۸۵۳	۲۸۵۰/۱۵۲



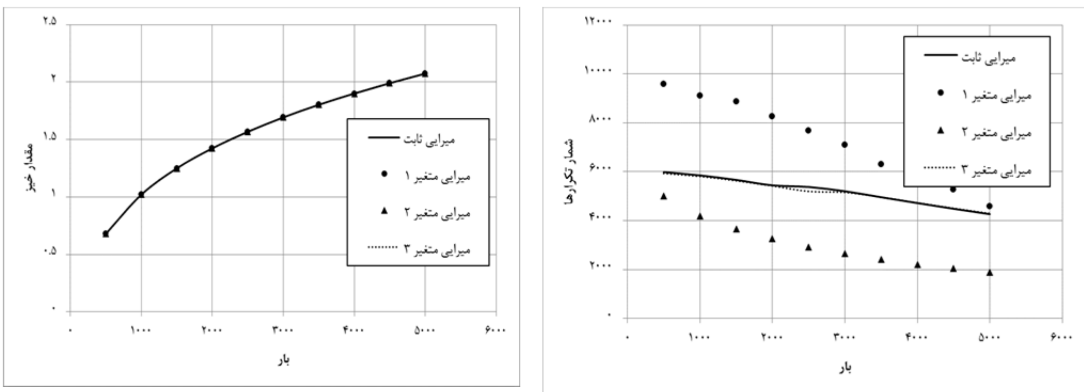
شکل ۱۴ شمار تکرارها و خیز مرکز صفحهٔ چهارگوش سوراخ دار



شکل ۱۵ هندسهٔ صفحهٔ L شکل

جدول ۱۶ زمان کل تحلیل و شمار تکرارهای صفحهٔ L شکل

گونهٔ میرایی	میرایی ثابت	میرایی متغیر ۱	میرایی متغیر ۲	میرایی متغیر ۳
شمار کل تحلیل	۵۲۰۴۴	۵۱۵۵۴	۷۰۳۸۶	۵۱۷۲۹
زمان کل تحلیل (ثانیه)	۱۸۷۹/۴۷۳	۱۸۰۰/۵۷۹	۲۵۶۱/۳۸۶	۱۸۲۳/۰۵۴



شکل ۱۶ شمار تکرارها و خیز مرکز صفحهٔ L شکل

صفحهٔ L شکل. در ادامه، صفحهٔ نشان داده شده در شکل (۱۵) واکاوی می‌شود. شبکه‌بندی به‌کار رفته در شکل (۱۵) نشان داده شده است. از ۱۵۰ جزء بهره‌جویی شده است. لبه‌های ۲ و ۳ گیردار هستند. سایر مرزها، تکیه‌گاه ساده می‌باشند. مرجع [48] این صفحه را فقط برای یک گام بارگذاری تحلیل کرده است. برای این نمونه نیز، شمار گام‌های بارگذاری و بیشینه عامل بدون بعد بار، به‌ترتیب، ۱۰ و ۵۰۰۰ می‌باشند. جدول (۱۶) و شکل (۱۶)، پاسخ‌ها را نشان می‌دهند. خطای مجاز برای معیار تغییرمکان و کارمایهٔ جنبشی، به‌ترتیب، 4×10^{-5} و 3×10^{-5} می‌باشند.

تجربه‌های عددی تاکنون آشکار کردند که میرایی متغیر بر پایهٔ معیار همگرایی سرعت، به کاهش زمان تحلیل و شمار تکرارها می‌انجامد. نمونه‌هایی که در این پژوهش به آن پرداخته شد، صفحه‌های ساده‌ای بودند که استفاده از معیار سرعت برای میرایی متغیر، کاهش ۱۰ درصدی زمان تحلیل‌ها را در پی داشتند. چنان‌چه صفحه‌ها چندین تکیه‌گاه و یا شکل هندسی پیچده‌ای داشته باشند، این کاهش ۱۰ درصدی بسیار مفید است و اهمیت فراوانی دارد.

نتیجه‌گیری

برتری شیوهٔ تفاوت محدود نسبت به سایر روش‌ها در این است که در فن تفاوت محدود نیازی به بر پا ساختن ماتریس سختی، بردار نیروهای جزءها و سوار نمودن آنها نمی‌باشد. از این‌رو، شمار تکرارها و زمان تحلیل برای رسیدن به پاسخ کاهش می‌یابد. هم‌چنین، می‌توان از رایانه‌ای با توانایی انبارسازی کم بهره‌جست. برای تحلیل ناخطی هندسی صفحه‌های خمشی راست‌پهلو، فن تفاوت‌های محدود به همراه راه‌حل رهایی پویا در این مقاله به‌کار رفت. جرم ساختگی بااستفاده از روش پیشنهادی کَسل و هُبس به‌دست آمد و میرایی ساختگی به دو گونهٔ ثابت و متغیر پنداشته شدند. میرایی از برابری $c_{\alpha_{i,i}} = m_{\alpha_{i,i}}(F)^{-1}$ در دسترس قرار گرفت و مقداری برای F تعیین گشت تا همگرایی را برقرار نماید. باید افزود، همگرایی افزون بر وابسته بودن به F، به مقدار بار و شبکه‌بندی نیز وابسته است. آشکار گردید با F=۰/۷۵ و شبکه‌بندی ریز و در حالتی که نسبت اندازهٔ پهلوی هر شبکه به پهلوی صفحه در همان راستا برابر ۰/۲۵ باشد، همگرایی به‌ازای هر باری برقرار خواهد بود. در تحلیل صفحه‌های با تغییرشکل‌های کوچک، می‌توان برای سرعت بخشیدن به همگرایی عامل F را بسیار بیشتر از ۰/۷۵ انتخاب کرد.

از سوی دیگر، بااستفاده از F=۰/۷۵، صفحه‌هایی با دو میرایی متغیر و ثابت تحلیل شدند. برای رسیدن به همگرایی در راه‌کار میرایی متغیر، نویسندگان از سه معیار سرعت، کارمایهٔ جنبشی و نسبت تغییرمکان دو گام پیاپی بهره گرفتند. برای میرایی ثابت، تنها معیار سرعت به‌کار رفت. بارگذاری در۴۰ نمو انجام پذیرفت و از پاسخ‌های نمو پیشین نیز برای سرعت بخشیدن به همگرایی استفاده گشت. خطای مجاز برای معیارهای همگرایی کارمایهٔ جنبشی و نسبت تغییرمکان دو گام پیاپی، با فرآیند آزمون و خطا در دسترس قرار گرفت؛ به‌گونه‌ای که مقدار خیز در بیشینه بار برابر با مقدار آن بر پایهٔ معیار سرعت شد. این خطای مجاز، تفاوت مقدار خیز با معیار سرعت در سایر بارها را دست بالا ۰/۱ درصد و یا بسیار کمتر از این مقدار می‌دهد. هم‌چنین، مقدار نیروهای داخلی نیز بسیار به یکدیگر نزدیک بودند. پاسخ‌های عددی نشان می‌دهند که روش پیشنهادی سبب کاهش شمار تکرارها و زمان رسیدن به همگرایی می‌شود. این کاهش در کمترین حالت ۱۰ درصد بود. بنابراین، شایسته خواهد بود که در گونهٔ تفاوت محدود رهایی پویا میرایی متغیر و معیار همگرایی سرعت به‌کار رود. افزون بر اینها، آشکار شد که استفاده از معیار نسبت تغییرمکان دو گام پیاپی کم‌ترین اثر را در تحلیل دارد و بدترین پاسخ‌ها را در بیشتر مسئله‌ها به‌دست می‌دهد.

مراجع

1. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., "*Theory of plates and shells*", McGraw-hill, New York, (1959).
2. Szilard, R., "*Theories and applications of plate analysis: classical numerical and engineering methods*", John Wiley & Sons, New Jersey, USA, (2004).
3. Levy, S., "Bending of rectangular plates with large deflections", NACA Technical Note 846, pp. 1-46, (1942).
4. Mindlin, R.D., "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, pp. 31-38, (1951).
5. Reissner, E., "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12, pp. A69-A77, (1954).
6. Bergan, P.G. and Clough, R.W., "Large deflection analysis of plates and shallow shells using the finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 5 (4), pp. 543-556, (1973).
7. Yang, R. and Bhatti, M., "Nonlinear static and dynamic analysis of plates", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 111 (2), pp. 175-187, (1985).
8. Dawe, D.J., Lam, S.S.E. and Azizian, Z.G., "Non-linear finite strip analysis of rectangular laminates under end shortening, using classical plate theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35 (5), pp. 1087-1110, (1992).
9. Otter, J.R.H. and Day, A.S., "Tidal computations", *The Engineer*, Vol. 289, pp. 177-182, (1960).
10. Otter, J.R.H., "Computations for pre-stressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation", *Nuclear Structural Engineering*, Vol. 1 (1), pp. 61-75, (1965).
11. Day, A.S., "An introduction to dynamic relaxation", *The Engineer*, Vol. 219, pp. 218-221, (1965).
12. Frankel, S.P., "Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations", *Math. Tables and Other Aids to Computation*, Vol. 4 (30), pp. 65–75, (1950).
13. Rushton, K.R., "Large deflection of variable-thickness plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 10 (9), pp. 723-735, (1968).
14. Rushton, K.R., "Post-buckling of tapered plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 11 (5), pp. 461-480, (1969).
15. Basu, A. and Dawson, J., "*Orthotropic sandwich plates*", Proc. Inst Civil Engineers Proc, London, UK, pp. 87-115, (1970).
16. Rushton, K.R., "Buckling of laterally loaded plates having initial curvature", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 14 (10), pp. 667-680, (1972).
17. Turvey, G. and Wittrick, W., "The large deflection and post-buckling behavior of some laminated plates", *Aeronautical Quarterly*, Vol. 24, pp. 77-86, (1973).
18. Alwar, R.S. and Rao, N.R., "Nonlinear analysis of orthotropic skew plates", *AIAA Journal*, Vol. 11 (4), pp. 495-498, (1973).
19. Alwar, R.S. and Rao, N.R., "Large elastic deformations of clamped skewed plates by dynamic relaxation", *Computers & Structures*, Vol. 4 (2), pp. 381-398, (1974).
20. Rushton, K.R. and Hook, P.M., "Large deflection of plates and beams obeying non-linear stress-strain laws", *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, Vol. 9 (3), pp. 178-184, (1974).
21. Hook, P.M. and Rushton, K.R., "Buckling of beams and plates onto an intermediate support studied by the dynamic relaxation method", *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, Vol. 10 (3), pp. 153-158, (1975).

22. Frieze, P.A., Hobbs, R.E. and Dowling, P.J., "Application of dynamic relaxation to the large deflection elasto-plastic analysis of plates", *Computers & Structures*, Vol. 8 (2), pp. 301-310, (1978).
23. Turvey, G.J., "Large deflection of tapered annular plates by dynamic relaxation", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 104 (2), pp. 351-366, (1978).
24. Pica, A. and Hinton, E., "Transient and pseudo-transient analysis of Mindlin plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15 (2), pp. 189-208, (1980).
25. Turvey, G.J. and Der Avanessian, N.G.V., "DR analysis of beams using graded finite differences", *Computers & Structures*, Vol. 22 (5), pp. 737-742, (1986).
26. Al-Shawi, F.A.N. and Mardirosian, A.H., "An improved dynamic relaxation method for the analysis of plate bending problems", *Computers & Structures*, Vol. 27 (2), pp. 237-240, (1987).
27. Zhang, L.G. and Yu, T.X., "Modified adaptive dynamic relaxation method and its application to elastic-plastic bending and wrinkling of circular plates", *Computers & Structures*, Vol. 33 (2), pp. 609-614, (1989).
28. Turvey, G.J. and Osman, M.Y., "Elastic large deflection analysis of isotropic rectangular Mindlin plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 32 (4), pp. 315-328, (1990).
29. Turvey, G.J. and Salehi, M., "DR large deflection analysis of sector plates", *Computers & Structures*, Vol. 34 (1), pp. 101-112, (1990).
30. Salehi, M. and Turvey, G.J., "Elastic large deflection response of annular sector plates—a comparison of dr finite-difference, finite element and other numerical solutions", *Computers & Structures*, Vol. 40 (5), pp. 1267-1278, (1991).
31. Kadkhodayan, M., Zhang, L.C. and Sowerby, R., "Analyses of wrinkling and buckling of elastic plates by DXDR method", *Computers & Structures*, Vol. 65 (4), pp. 561-574, (1997).
32. Turvey, G.J. and Salehi, M., "Annular sector plates: Comparison of full-section and layer yield predictions", *Computers & Structures*, Vol. 83 (28–30), pp. 2431-2441, (2005).
33. Cassell, A., Kinsey, P. and Sefton, D., "Cylindrical shell analysis by dynamic relaxation", *Proc. ICE Proceedings*, Vol. 39, pp. 75-84, (1968).
34. Otter, J., Pippard, A., Lane, R., Welch, A., King, I., Wood, W., Cubitt, N., Hayes, R., Hobbs, R. and Zienkiewicz, O., "Discussion: dynamic relaxation", *Proc. ICE Proceedings*, Vol. 37, pp. 723-750, (1967).
35. Wood, W.L., "Comparison of dynamic relaxation with three other iterative methods", *Engineer*, Vol. 224, pp. 683-687, (1967).
36. Wood, W.L., "Note on dynamic relaxation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3 (1), pp. 145-147, (1971).
37. Brew, J.S. and Brotton, D.M., "Nonlinear structural analysis by dynamic relaxation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3 (4), pp. 463-483, (1971).
38. Bunce, J.W., "A note on the estimation of critical damping in dynamic relaxation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 4 (2), pp. 301-303, (1972).
39. Cassell, A.C. and Hobbs, R.E., "Numerical stability of dynamic relaxation analysis of non-linear structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10 (6), pp. 1407-1410, (1976).
40. Papadrakakis, M., "A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 25 (1), pp. 35-48, (1981).
41. Felippa, C.A., "Dynamic relaxation under general increment control", *Mathematical Programming*, Vol. 24, pp. 103-133, (1982).
42. Underwood, P., "Dynamic relaxation (in structural transient analysis)", Computational methods for transient analysis (A 84-29160 12-64), Amsterdam, North-Holland, pp. 245-265, (1983).

43. Qiang, S., "An adaptive dynamic relaxation method for nonlinear problems", *Computers & Structures*, Vol. 30 (4), pp. 855-859, (1988).
44. Zhang, L.C., Kadkhodayan, M. and Mai, Y.W., "Development of the maDR method", *Computers & Structures*, Vol. 52 (1), pp. 1-8, (1994).
45. Munjiza, A., "A K^m proportional damping for dynamic relaxation", *International Journal for Engineering Modelling*, Vol. 9 (1-4), pp. 1-9, (1996).
46. Munjiza, A., Owen, D.R.J. and Crook, A.J.L., "An $M(M^{-1}K)^m$ proportional damping in explicit integration of dynamic structural systems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 41 (7), pp. 1277-1296, (1998).
47. Rezaiee-Pajand, M. and Taghavian Hakkak, M., "Nonlinear analysis of truss structures using dynamic relaxation", *International Journal of Engineering*, Vol. 19 (1), pp. 11-22, (2006).
48. Kadkhodayan, M., Alamatian, J. and Turvey, G.J., "A new fictitious time for the dynamic relaxation (DXDR) method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74 (6), pp. 996-1018, (2008).
49. Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J., "Nonlinear dynamic analysis by dynamic relaxation method", *Structural Engineering & Mechanics*, Vol. 28 (5), pp. 549-570, (2008).

۵۰. رضایی پژند، محمد و علامتیان، جواد "روش رهایی پویا برای پیمایش مسیر ایستایی سازه‌های خرپایی"، *مجله مدلسازی در مهندسی*، سال هفتم، شماره ۱۷، صص ۳۹–۲۷، (۱۳۸۸).

۵۱. سرافرازی، سید رضا، "تابع اولیه گیری عددی برای تحلیل پویای سازه‌ها"، رسالهٔ دکتری مهندسی عمران(سازه)، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، (۱۳۸۹).

52. Rezaiee-Pajand, M. and Sarafrazi, S.R., "Nonlinear structural analysis using dynamic relaxation method with improved convergence rate", *International Journal of Computational Methods*, Vol. 7 (4), pp. 627-654, (2010).
53. Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J., "The dynamic relaxation method using new formulation for fictitious mass and damping", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 34 (1), pp. 109-133, (2010).
54. Rezaiee-Pajand, M., Kadkhodayan, M., Alamatian, J. and Zhang, L.C., "A new method of fictitious viscous damping determination for the dynamic relaxation method", *Computers & Structures*, Vol. 89 (9–10), pp. 783-794, (2011).
55. Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J., "Automatic DR structural analysis of snap-through and snap-back using optimized load increments", Journal of Structural Engineering, Vol. 137 (1), pp. 109-116, (2011).
56. Rezaiee-Pajand, M. and Sarafrazi, S.R., "Nonlinear dynamic structural analysis using dynamic relaxation with zero damping", *Computers & Structures*, Vol. 89 (13–14), pp. 1274-1285, (2011).
57. Rezaiee-Pajand, M., Kadkhodayan, M. and Alamatian, J., "Timestep selection for dynamic relaxation method", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 40 (1), pp. 42-72, (2012).
58. Rezaiee-Pajand, M., Sarafrazi, S.R. and Rezaiee, H., "Efficiency of dynamic relaxation methods in nonlinear analysis of truss and frame structures", *Computers & Structures*, Vol. 112–113, pp. 295-310, (2012).

۵۹. رضایی، حسینه، "تحلیل ناخطی سازه‌ها با روش رهایی پویا"، پایان نامهٔ کارشناسی ارشد مهندسی عمران (سازه)، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، (۱۳۹۰).

60. Topping, B.H.V. and Ivanyi, P., "*Computer aided design of cable membrane structures*", Saxe-Coburg Publications, Scotland, pp. 39-84, (2008).
61. Cundall, P., "Explicit finite-difference methods in geomechanics", *Proc. Proceeding 2nd International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, Vol. 1, Blacksburg, Virginia., pp. 132-150, (1976).